

Commande par mode de glissement d'un servomoteur

Justin Cano

École Polytechnique de Montréal
Département de Génie Électrique
Email: nom.prénom@polymtl.ca

Résumé

Ce document à visée pédagogique explique comment synthétiser un contrôleur non-linéaire tout ou rien pour asservir un servomoteur en angle. Le modèle de servomoteur utilisé pour cette synthèse est linéaire et similaire à celui étudié dans les laboratoires du cours de Génie Électrique Asservissements à Polytechnique Montréal.

Le principal attrait pour ce type de contrôleur est la simplicité de structure de la commande, qui peut être considérée comme booléenne et non plus linéaire, ce qui revêt un attrait tout particulier quant au coût d'un effecteur.

Nous passons en revue la modélisation du servomoteur ainsi que la théorie des modes de glissements afin d'effectuer cette synthèse.

I. INTRODUCTION

Notre objectif sera d'asservir un servomoteur en angle θ avec une loi tout-ou-rien (appelée aussi *bang-bang* dans la littérature). Cette dernière a le mérite de ne nécessiter que d'un interrupteur qui sélectionne deux tensions différentes. On prendra deux tensions symétriques M et $-M$, $M > 0$ afin de simplifier l'étude.

Notre but est ici de concevoir l'algorithme qui commutera cet interrupteur en fonction des mesures dans le but de poursuivre un angle de référence que nous noterons θ_r . En pratique, l'interrupteur électronique peut être un relais (interrupteur électromécanique) ou bien un pont de transistors et on peut le commander grâce à un microcontrôleur, capable de calculer la loi de commande.

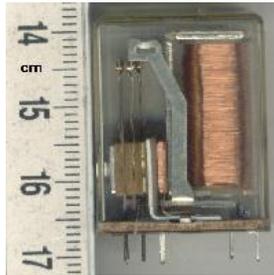


FIGURE 1. Relais électromécanique [Wikimedia Commons].

Ainsi, les composants utilisés dans la chaîne de commande ne sont pas linéaires mais ont le mérite d'être beaucoup moins dispendieux que leurs homologues. En effet, requérir un convertisseur numérique-analogique et un amplificateur de puissance peut engendrer un coût rédhibitoire pour l'industriel. Notre stratégie tout-ou-rien s'appuiera sur les propriétés dynamiques du système lui-même afin de commuter à bon escient l'interrupteur ainsi automatisé.

Pour ce faire, nous commençons à la section II par modéliser le système en utilisant des lois basiques de mécanique, d'électricité et d'électromagnétique. Une fois ceci fait, nous extrayons une représentation d'état pour l'étude du système.

En se basant sur les principes du contrôle par mode de glissement (*Sliding Mode Control*) afin de synthétiser un contrôleur, nous pouvons mener une étude du système bouclé avec la loi tout-ou-rien à la

section III. Nous nous appuyons pour cela sur un exemple du cours de *systèmes non linéaires* du Pr. Zhu à Polytechnique Montréal [1].

Enfin, nous présentons quelques simulations et nous concluons sur cette approche à la section IV.

II. MODÉLISATION DU SYSTÈME

Dressons le modèle du servomoteur à partir des équations physiques dans cette section.

Également, nous prendrons pour exemple des données numériques des constantes physiques régissant le servomoteur. Nous donnons les valeurs de celles-ci dans la table I.

| Nom | Symbole | Unité | Valeur |
|---|---------|-------------------------|----------------------|
| Inductance de la bobine | L | mH | 2.0 |
| Résistance interne de la bobine | R | Ω | 2.5×10^{-1} |
| Moment d'inertie du rotor et du réducteur | J | kg.m ² | 4.0×10^{-3} |
| Coefficient de frottement cinétique | f | N.m.s.rad ⁻¹ | 1.0×10^{-2} |
| Constante d'induction du moteur | Φ | Weber | 5.0×10^{-2} |

TABLE I
TABLE DES VALEURS FOURNIES PAR LE CONSTRUCTEUR

A. De la physique à la fonction de transfert

1) *Équation électrique*: Électriquement, un moteur à courant continu est considéré comme un circuit RL série lui-même en série avec un générateur de courant, qui représente la force contre-électromotrice¹ obtenue par induction.

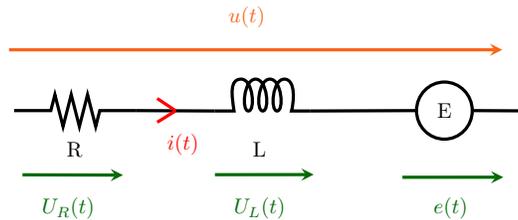


FIGURE 2. Schéma électrique du moteur.

Une bobine d'inductance L est présente dans ce dernier ainsi qu'une résistance R et un générateur de tension e .

La loi des mailles s'applique et on obtient :

$$u = \sum u_i = u_R + u_L + e = Ri + L \frac{di}{dt} + e. \quad (1)$$

2) *Équation mécanique*: On connaît l'inertie J sur l'axe du servomoteur \vec{s} ou du moins on peut la calculer de manière approchée. En effet, celle-ci est définie comme étant :

$$J = \int_x \int_y \int_z \rho(x, y, z) d^2([x, y, z], \vec{s}) dx dy dz,$$

avec $\rho(x, y, z)$ la densité volumique de masse (constante dans un milieu homogène) et $d([x, y, z], \vec{s})$ la distance entre le point-intégrande de coordonnées x, y, z associé au volume $dV = dx dz dy$ et l'axe \vec{s} .

1. Rappelons que ce qui est appelé force électromotrice est également appelé tension.

Des formes de rotor simples (à savoir comportant des symétries de révolution) comme les axes visent à simplifier grandement le calcul de cette intégrale, voir² et aussi une paramétrisation bénéficiant de ces symétries.

Nous pouvons ainsi appliquer le théorème du moment cinétique sur l'axe du moteur :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \sum \Gamma_i,$$

avec ω la vitesse de rotation et Γ_i les couples auquel le servomoteur est soumis.

Trois sources de couples sont à considérer :

- La **force de frottement visqueux** s'oppose au mouvement et est proportionnelle à la vitesse de rotation $\Gamma_v = -f\omega$;
- Le **couple induit** par force électromagnétique, que nous noterons simplement Γ ;
- Nous avons choisi dans cette étude de ne pas modéliser les **frottements secs** : en effet, ceux-ci n'ont pas le même effet que sur une commande linéaire. On supposera que la valeur de la commande tout-ou-rien $u = \pm M$ fourniront une tension suffisante pour lutter contre cet éventuel frottement. Toutefois, ce dernier peut altérer notre prédiction de dynamique mais pour simplifier l'étude théorique, nous en négligeons les effets.

3) *Équations électromagnétiques*: Afin de simplifier le modèle, on suppose un **moteur à courant continu à aimant permanent**.

Des équations fondamentales de l'électromagnétique (de Maxwell) peuvent être déduites deux lois de couplage électromécaniques.

- La **Loi de Laplace**, qui définit une force élémentaire $d\vec{F}(M)$ appliquée en un point M de volume élémentaire dV :

$$d\vec{F}(M) = \vec{j}(M, t) dv \times \vec{B}(M, t)$$

avec \vec{j}_R le vecteur de densité de courant au point M et B son champ électromagnétique, \times est la notation pour le produit vectoriel. Remarquons que si le courant circule dans un fil, on peut simplifier cette équation car $\vec{j} = i(t)\vec{dl}$ avec \vec{dl} vecteur de longueur infinitésimale pointant dans la direction du fil et dans le sens de l'intensité :

$$d\vec{F}(M) = i(t)\vec{dl}(M) \times \vec{B}(M, t).$$

Ici, on est en présence d'un aimant permanent, on supposera $\vec{B}(M, t) = B_0\vec{e}_r$ indépendant du temps et de la direction. On intégrera cette force sur toutes les spires de fils où circulent le courant, c'est-à-dire dans le rotor. On suppose que \vec{s} est orthogonal à la direction du fil \vec{dl} et que le vecteur radial \vec{e}_r forme une base orthogonale directe telle que $\vec{dl} \times \vec{e}_r = dl\vec{s}$. On peut supposer que les spires sont rectangulaires, de longueur L et de largeur l .

$$\Gamma(t) = \int_{\text{spire}} d\vec{F}(M, t) \cdot \vec{s} = \int_{\text{spire}} i(t)B_0\vec{dl}(M) \times \vec{e}_r \cdot \vec{s} = lLB_0i(t).$$

Après calcul, [2] on obtient le couple appliqué au rotor proportionnel à l'intensité, avec Φ une constante indépendante des variables et du temps :

$$\Gamma(t) = \Phi i(t)$$

- La **Loi d'induction de Lorentz** va relier la tension induite à la vitesse d'un mobile plongé dans un champ magnétique (effet dynamo) :

$$e(t) = - \oint_{\text{circuit}} (\vec{v}(M, t) \times B(M, t)) \cdot \vec{dl},$$

2. https://fr.qaz.wiki/wiki/List_of_moments_of_inertia

avec $\vec{v}(M, t)$ la vitesse du point que l'on pourra relier à la vitesse de rotation à l'aide de la distance entre l'axe et le point étudié de la spire $\vec{v}(M, t) = d(M, \vec{s})\omega(t)$.

On peut appliquer cette formule à notre spire et résoudre l'intégrale [2] :

$$e(t) = - \int_{\text{spire}} (\vec{v}(M, t) \times B_0 \vec{e}_r) \cdot d\vec{l} = lLB_0\omega(t).$$

on remarque également la même constante de proportionnalité entre vitesse de rotation et tension induite :

$$e(t) = \Phi\omega(t)$$

Nous disposons désormais de toutes les équations temporelles requises pour mener à bien notre étude.

4) *Obtention de la fonction de transfert:* On transforme les équations dans le domaine de Laplace, en supposant une énergie nulle à l'état initial du système (conditions de Heavyside, voir [3, Chap. 4]).

L'équation mécanique devient :

$$\mathcal{L} \left\{ J \frac{d\omega}{dt} \right\} = \mathcal{L} \{ -f\omega(t) + \Gamma(t) \} \Leftrightarrow \Omega(s)[Js + f] = \Gamma(s), \quad (2)$$

les équations électromagnétiques deviennent :

$$\mathcal{L} \{ e(t) \} = \mathcal{L} \{ \Phi\omega(t) \} \Leftrightarrow E(s) = \Phi\Omega(s) \quad (3)$$

et

$$\mathcal{L} \{ \Gamma(t) \} = \mathcal{L} \{ \Phi i(t) \} \Leftrightarrow \Gamma(s) = \Phi I(s) \quad (4)$$

puis l'équation électrique nous donnera la fonction de transfert en utilisant successivement les trois autres :

$$\mathcal{L} \left\{ L \frac{di}{dt} + Ri(t) \right\} = \mathcal{L} \{ u(t) - e(t) \} \Leftrightarrow (Ls + R)I(s) = U(s) - E(s)$$

$$(3) \Rightarrow (Ls + R)I(s) = U(s) - \Phi\Omega(s)$$

$$(4) \Rightarrow (Ls + R) \frac{\Gamma(s)}{\Phi} = U(s) - \Phi\Omega(s)$$

$$(2) \Rightarrow (Ls + R) \frac{\Omega(s)[Js + f]}{\Phi} = U(s) - \Phi\Omega(s)$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(Ls + R)(Js + f)}{\Phi} + \Phi \right] \Omega(s) = U(s)$$

$$\Leftrightarrow F(s) := \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\Phi}{(Ls + R)(Js + f) + \Phi^2}.$$

L'idée est de **négliger les effets du transitoire électrique** devant ceux de l'inertie mécanique. En effet, les inductances des bobines de moteurs à courant continu sont souvent très faibles ce qui permet de négliger la constante de temps de l'établissement du courant dans la bobine.

On pose $\tau_1 = J/f$ et $\tau_2 = L/R$ et on évalue ces temps caractéristiques numériquement :

$$\tau_1 = 0.004/0.01 = 0.4 \text{ s}, \text{ et } \tau_2 = 2.0 \times 10^{-3}/0.25 = 8.0 \times 10^{-3} \text{ s} \Rightarrow \tau_1 \gg \tau_2.$$

ainsi la dynamique associée à τ_2 , c'est-à-dire le circuit électrique, peut être négligée :

$$F(s) = \frac{\Phi}{fR(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + \Phi^2} \approx \frac{\Phi}{fR(\tau_1 s + 1) + \Phi^2}.$$

on remarque que l'inductance L est la seule composante qui n'apparaît plus. En effet, négliger le temps électrique, c'est négliger l'établissement transitoire du courant dans la bobine, ce qui revient à évaluer $L := 0$. On peut mettre sous forme canonique le résultat précédent :

$$F(s) = \frac{K}{1 + \tau s}, K = \frac{\Phi}{\Phi^2 + fR}, \tau = \frac{JR}{\Phi^2 + fR}$$

et on trouve $K = 10 \text{ rad.s}^{-1}.\text{V}^{-1}$ et $\tau = 0.2 \text{ s}$.

B. De la fonction de transfert à la représentation d'état

Notre variable d'intérêt est l'angle θ , intégrale de la vitesse ω . Ainsi, $\Theta(s) = \frac{1}{s}\Omega(s)$. Le système peut donc être vu comme la fonction de transfert $G(s)$ dans le domaine de Laplace qui est définie ci-dessous :

$$G(s) = \frac{1}{s}F(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \frac{K}{\tau s + 1},$$

nous souhaitons obtenir sa représentation d'état. Convenons que la représentation de l'état du servomoteur ne requiert que de sa vitesse $\omega = \dot{\theta}$ et de sa position θ (angulaires toutes deux) pour fonctionner. En effet, la fonction de transfert permet d'extrapoler la relation suivante :

$$KU(s) = s^2\tau\Theta(s) + s\Theta(s),$$

ainsi, en passant dans le domaine temporel, on a :

$$Ku(t) = \tau\ddot{\theta}(t) + s\dot{\theta}(t) \Leftrightarrow \dot{\omega}(t) = -\frac{1}{\tau}\omega(t) + \frac{K}{\tau}u(t),$$

nous savions déjà ceci, mais ce fut un bon exercice.

Ainsi, si on choisit le vecteur d'état $\mathbf{x} = [\theta, \omega]$ on obtient la représentation d'état qui suit :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t), \\ \dot{\omega}(t) = -\frac{1}{\tau}\omega(t) + \frac{K}{\tau}u(t). \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} := \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (5)$$

III. ANALYSE DE LA STRATÉGIE DE COMMANDE PROPOSÉE

A. Contrôleur non-linéaire

On suppose un contrôleur à relais. Le relais commute si et seulement si la tension $z(t)$ à ses bornes est positive. Il possède un état normalement ouvert, où $u = -U_0$ (non commuté) et $u = U_0$ dans l'état normalement fermé (commuté). Pour résumer :

$$u(t) = \text{sign}(z(t))U_0$$

avec $\text{sign}(z(t)) = +1$ si $z(t) \geq 0$ et $\text{sign}(z(t)) = -1$ si $z(t) < 0$ dans l'autre cas.

Notre stratégie est de poursuivre un angle voulu θ_r constant, nous allons définir l'erreur $e(t) = \theta_r - \theta(t)$ et sa dérivée $\dot{e}(t) = -\omega$ qui n'est autre que l'opposée de la vitesse puisque l'angle désiré est constant.

Notre stratégie est d'effectuer une sorte d'asservissement *proportionnel dérivé* non linéaire en construisant un $z(t)$ tel que :

$$z(t) = \alpha e(t) + \beta \dot{e}(t) = \alpha(\theta_r - \theta) - \beta\omega.$$

B. Variété de glissement

La **variété de glissement** est définie comme étant un hyperplan paramétré de l'espace d'état (ou du plan de phase) où la commutation se produit. Ici, clairement tout angle et toute vitesse respectant $z(\theta, \omega) = 0$ définit cet hyperplan, qui n'est autre que la droite :

$$\mathcal{D} = \{ \theta, \omega \in \mathbb{R}^2, z = \alpha(\theta_r - \theta) - \beta\omega = 0. \}$$

Théorème 1 (Mode de glissement). *On dit qu'un système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$ est en mode de glissement s'il existe une application z telle que :*

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} U^+, & z(\mathbf{x}) \geq 0 \\ U^- & \text{sinon.} \end{cases}$$

(notez que la variété de glissement est définie par $z(\mathbf{x}) = 0$) et qu'il existe u_e , **commande équivalente** vérifiant :

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u_e) = 0.$$

avec $U^- < u_e < U^+$.

1) *Mode de glissement:* Voyons si cette commande équivalente existe dans notre cas. En reprenant les équations précédentes, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u_e) &= [-\alpha \quad -\beta] \begin{bmatrix} \omega \\ -\frac{1}{\tau}\omega + \frac{K}{\tau}u_e \end{bmatrix} \\ &= -\alpha\omega + \frac{\beta}{\tau}\omega + \frac{\beta K}{\tau}u_e = 0 \\ \Leftrightarrow u_e &= \left[\frac{\tau\alpha}{\beta} - 1 \right] \frac{\omega}{K} = [\tau\alpha - \beta] \frac{\omega}{K\beta} \end{aligned} \quad (6)$$

on remarquera que $-M < u_e < M$ si et seulement si, en supposant $\alpha, \beta > 0$:

$$M > \left| [\tau\alpha - \beta] \frac{\omega}{K\beta} \right| \Leftrightarrow |\omega| < \frac{MK\beta}{|\tau\alpha - \beta|}.$$

2) *Est-ce que la variété de glissement est attractrice ?:* Maintenant qu'on sait que le mode de glissement existe et à quelle condition (que la vitesse ne soit pas excessive), il nous manque à prouver qu'il soit atteignable dans un temps fini.

Soit la quantité suivante : $V(t) = \frac{1}{2}z^2(t)$, si on prouve que cette quantité tend vers zéro quand t tend vers l'infini, alors on prouve par ailleurs que la variété \mathcal{D} sera atteinte. Si de plus on prouve que sa vitesse de convergence est suffisamment grande, c'est-à-dire que pour tout point hors de la variété $\exists \epsilon > 0, \dot{V} \leq -\epsilon < 0$, alors on sait que cette convergence se fera dans un temps fini.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{V} = z\dot{z} &= (\alpha(\theta_r - \theta) - \beta\omega)(-\alpha\omega - \beta\dot{\omega}) \\ &= -z \left(\alpha\omega + \beta \left(-\frac{1}{\tau}\omega(t) + \frac{K}{\tau}u \right) \right) \\ &= -z \frac{\beta K}{\tau} \left(\frac{\tau\alpha - \beta}{\beta K} \omega + u \right) \end{aligned}$$

Trois cas sont alors à considérer :

— Si $z = 0$ alors on se trouve déjà sur la variété \mathcal{D} ;

— Si $z < 0$, alors $u = -M$ et $\dot{V} < 0$ si et seulement si :

$$\frac{\tau\alpha - \beta}{\beta K}\omega - M < 0$$

Ce qui est toujours le cas car :

$$\frac{\tau\alpha - \beta}{\beta K}\omega - M \leq \left| \frac{\tau\alpha - \beta}{\beta K}\omega \right| - M < 0$$

grâce à la condition sur la vitesse de rotation $|\omega| < \frac{MK\beta}{|\tau\alpha - \beta|}$.

— Si $z > 0$ alors $u = M$ et $\dot{V} < 0$ si et seulement si :

$$\frac{\tau\alpha - \beta}{\beta K}\omega + M > 0$$

Ce qui est toujours vérifié car :

$$\frac{\tau\alpha - \beta}{\beta K}\omega + M \geq - \left| \frac{\tau\alpha - \beta}{\beta K}\omega \right| + M > 0$$

grâce à la même inégalité sur $|\omega|$.

Ce qui fait que la variété de glissement est atteinte en un temps fini pourvu que la condition sur la vitesse de rotation soit vérifiée.

3) *Comportement sur la variété*: Supposons maintenant que nous nous situons sur la variété de glissement \mathcal{D} , nous avons vu que cette dernière est attractive en un temps fini, donc à un moment donné, le système coulissera sur cette dernière.

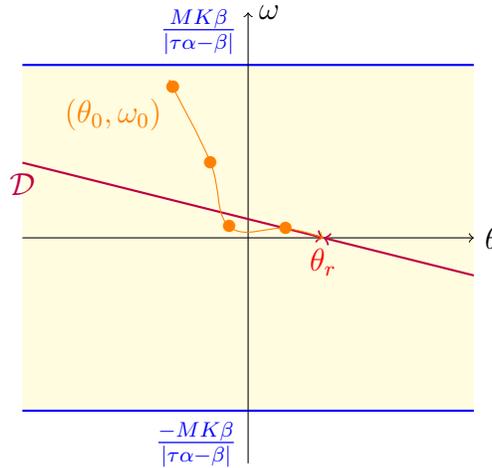


FIGURE 3. Plan de phase résumant la situation.

Si le système se trouve exactement sur celle-ci, qu'en est-il de la stabilité? On respecte :

$$z = 0 \Leftrightarrow \alpha(\theta_r - \theta) - \beta\omega = 0$$

ce qui équivaut à l'équation différentielle normalisée suivante ($\dot{\theta} = \omega$) :

$$\dot{\theta} = -\frac{\alpha}{\beta}\theta + \frac{\alpha}{\beta}\theta_r$$

qui est une équation différentielle. On a supposé que $\alpha, \beta > 0$ donc cette dernière est sous ces conditions celle d'un système stable d'ordre un, qui convergera vers θ_r , en notant k une constante :

$$\theta(t) = ke^{-\frac{\alpha}{\beta}t} + \frac{\alpha}{\beta}\theta_r,$$

le système est donc asymptotiquement stable sur cette variété.

La figure 3 est un résumé des considérations précédentes dans le plan de phase représentant l'espace d'état θ, ω . On peut y trouver la variété de glissement \mathcal{D} , qui est paramétrée par $\omega = \frac{\alpha}{\beta}(\theta_r - \theta)$ la zone d'attractivité de cette dernière délimitée par l'inégalité $|\omega| < \frac{MK\beta}{|\tau\alpha - \beta|}$ ainsi qu'une trajectoire typique montrant l'attractivité du point de fonctionnement $(\theta_r, 0)$ et donc la stabilité du système en boucle fermée.

IV. SIMULATIONS

Nous avons codé tout ceci dans l'environnement Matlab-Simulink et obtenu les valeurs suivantes pour $\tau = 0.2$ s, $K = 10$ rad/V, $\alpha = 1$ V/rad, $M = 15$ V et $\beta = 0.06$ V.rad⁻¹.s ainsi que la valeur de consigne $\theta_r = 10$ rad.

La configuration du simulateur est visible à la figure 4. Nous avons tracé les résultats de la simulation 5, où nous pouvons remarquer que la consigne est globalement suivie malgré le chatolement du relais qui ne cesse de passer de l'état haut à l'état bas (± 15 V). Ceci est dû au relais que nous avons limité en fréquence, il ne peut pas commuter à plus de 100 Hz.

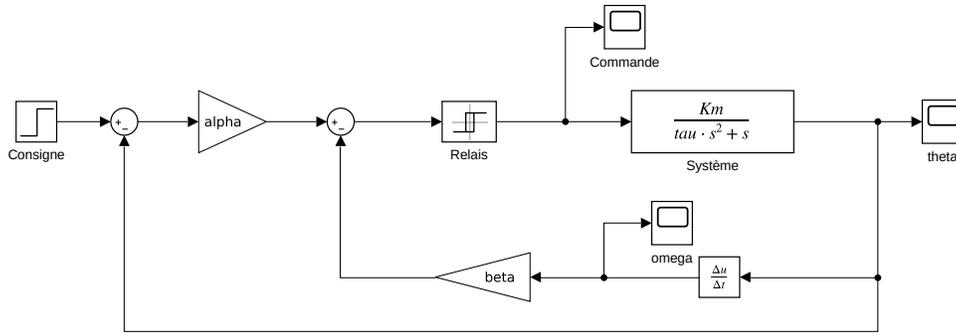


FIGURE 4. Configuration de la simulation.

On s'imaginera que dans ce cas, on ait en lieu et place d'un relais magnétique un pont de transistors afin de respecter cette spécification exigeante en terme de fréquence. Le pont de transistor est d'ailleurs plus durable qu'un relais pouvant s'user rapidement à cause de ses parties mécaniques. La loi de commande d'un pont de transistor en régime saturé (tout ou rien) est totalement identique à celle d'un relais inverseur électromécanique.

À cause de cette fréquence de commande finie (et donc limitée), la trajectoire du système en opération dans le plan de phase décrit à la figure 6 s'approche du point d'opération souhaité (vitesse nulle et angle θ_r) sans jamais l'atteindre exactement. Ceci est purement dû à la structure du contrôleur non-linéaire.

Cependant, on remarquera que la variété \mathcal{D} attire la trajectoire avant que cette dernière coulisse approximativement sur \mathcal{D} , d'où le nom de commande à mode de glissement. On notera que cet asservissement est économique car il ne nécessite qu'un simple calculateur numérique et aucune conversion analogique coûteuse pour opérer.

En ce qui concerne le réglage, la borne $\frac{MK\beta}{|\tau\alpha - \beta|} = 64$ rad.s dans notre cas, ce qui nous laisse une marge de manœuvre sur ω .

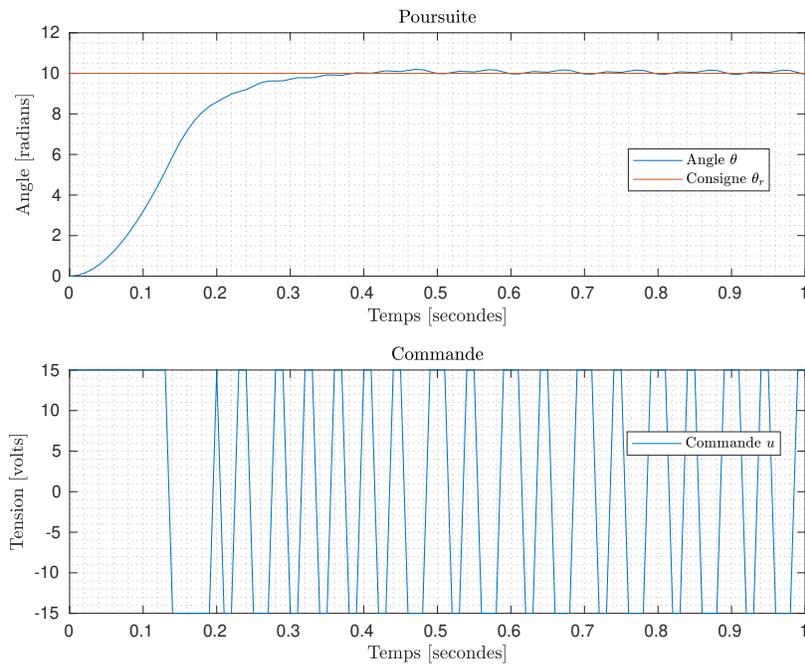


FIGURE 5. Résultats des simulations.

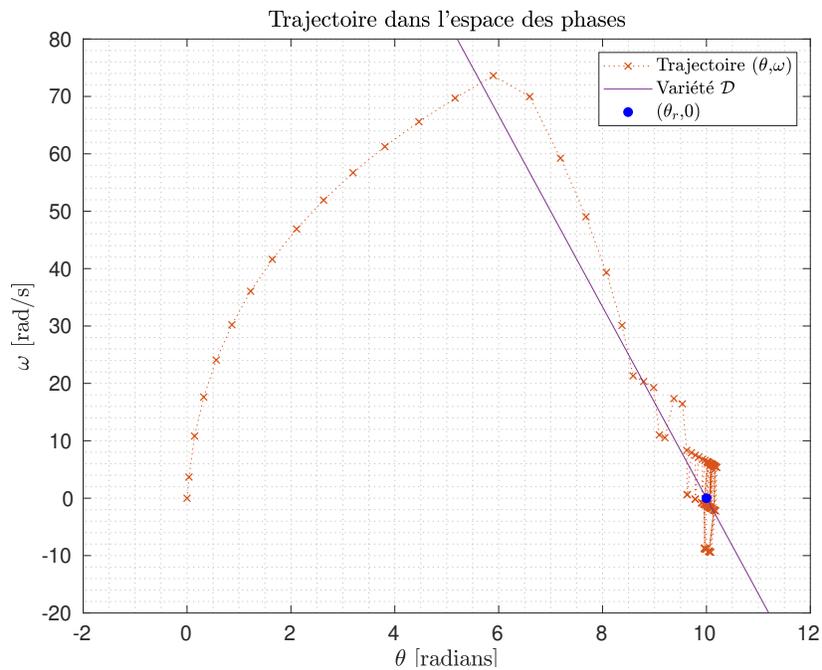


FIGURE 6. Plan de phase durant la trajectoire.

RÉFÉRENCES

- [1] G. Zhu, *Analyse et commande des systèmes non-linéaires*. Montreal, QC, Canada : École Polytechnique, 2019.
- [2] L. Vidal, R. Bourdin, F. Coq, V. Fraticelli, A. Sauret, and S. Zanier, *Pysique PSI*. Ellipses, 2011.
- [3] J. Cano, *Automatique des systemes lineaires*. Montreal, QC, Canada : Polytechnique Montréal, 2020.