

Localisation de robots

Justin Cano

École Centrale de Marseille

10 janvier 2020

Arnaud Venet

- Promo entrante 2015 ;
- M.S. Polymtl (Génie Électrique), Centrale (Still proceeding...);
- Expertise : **localisation et cartographie simultanée (SLAM), vision, apprentissage** ;
- Membre de *Air Gab One* (Drones au sein de E-Gab) en 2016.

Justin Cano

- Promo entrante 2014 ;
- M.S. Polytechnique Montréal (Génie Électrique), Centrale (juste là) ;
- Expertise : **fusion de senseurs, SWARMS, capteurs UWB, automatique** ;
- Président de E-Gab en 2015-16.

Nota bene : Ces slides sont disponible sur mon site perso
justincano.com

1 Le problème de localisation

2 Types de mesures

3 Moindres carrés (LS, *Least Squares*)

4 Filtrage de Kalman

5 Filtrage de Kalman Étendu

Plan de la section 1

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

- 1 Le problème de localisation
 - Formulation
 - Cinématique d'un robot 2D (UGV)
- 2 Types de mesures
 - *Dead Reckoning*
 - *Position Fixing*
- 3 Moindres carrés (LS, *Least Squares*)
 - Formulation du problème de multilatération
 - Méthode de Gauss-Newton
- 4 Filtrage de Kalman
 - Présentation
 - Exemple
- 5 Filtrage de Kalman Étendu
 - Présentation
 - Intégration dans un robot 2D
 - Simulations

Problème

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

- Comment localiser un robot dans un espace balisé ?

Problème

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

- Comment localiser un robot dans un espace balisé ?

Définition

Localiser c'est estimer la **position** d'un objet.

En **2D** c'est estimer la coordonnée (x, y) .

On appellera le vecteur $\mathbf{p}$ le **vecteur de position** :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Problème

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

- Comment localiser un robot dans un espace balisé ?

Définition

Localiser c'est estimer la **position** d'un objet.

En **2D** c'est estimer la coordonnée (x, y) .

On appellera le vecteur **p** le **vecteur de position** :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

La question est maintenant de savoir de **quelles données disposons-nous** pour résoudre le problème et trouver un **algorithme de résolution**.

Modèle cinématique d'un robot 2D I

Contraintes

- Un robot 2D évolue dans un plan $\mathbb{R}^2$;
- Il ne peut se déplacer transversalement $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y = 0$.

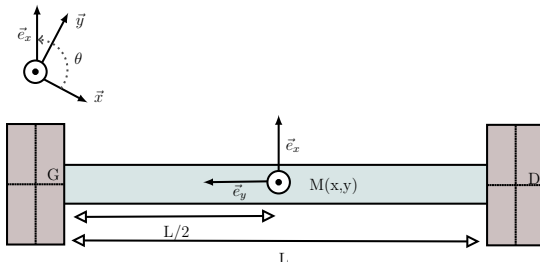


Figure – Robot vu de dessus.

Modèle cinématique d'un robot 2D II

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

Question

Quelles variables d'état suffisent à décrire l'état cinématique d'un robot ?

Modèle cinématique d'un robot 2D III

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

- Sa **position** $\mathbf{p} = [x, y]$;
- Son **attitude** (orientation) θ ;
- Sa **vitesse de rotation** $\omega = \dot{\theta}$;
- Sa **vitesse de translation** (ou tangentielle)
 $v_t = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$;

L'état est le suivant :

$$\mathbf{x} = [x \quad y \quad v_t \quad \theta \quad \omega]^T,$$

Les **équations cinématiques** d'un *robot 2D avec contrainte non-holonyme* (roulement sans glissement) est la suivante :

$$\dot{x} = v_t \cos(\theta), \quad \dot{y} = v_t \sin(\theta), \quad \dot{\theta} = \omega.$$

Plan de la section 2

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman

Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

- 1 Le problème de localisation
 - Formulation
 - Cinématique d'un robot 2D (UGV)
- 2 Types de mesures
 - *Dead Reckoning*
 - *Position Fixing*
- 3 Moindres carrés (LS, *Least Squares*)
 - Formulation du problème de multilatération
 - Méthode de Gauss-Newton
- 4 Filtrage de Kalman
 - Présentation
 - Exemple
- 5 Filtrage de Kalman Étendu
 - Présentation
 - Intégration dans un robot 2D
 - Simulations

Dead reckoning I

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

Un capteur en **dead reckoning** (DR) est un capteur estimant des états cinématiques internes du robot.

Exemples

- Un **accéléromètre** mesure l'accélération $\ddot{\mathbf{p}}_{R/0} = \mathbf{a}_{R/0}$;
- Un **gyroscope** mesure la vitesse angulaire $\omega_{R/0}$;
- Les **encodeurs** (odométrie) mesurent la vitesse des roues ω_g, ω_d .

Le souci du **DR** est l'intégration des erreurs de mesures. Il ne faut surtout pas l'utiliser de manière solitaire... il faut des mesures externe.

Dead reckoning II

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation
Formulation
Cinématique

Capteurs
Dead Reckoning
Position Fixing

Moindres
carrés
Formulation
Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation
Exemple

EKF
Présentation
Intégration dans
un robot 2D
Simulations

Lectures

Exemple : localisation à l'accéléromètre

Soit un robot décrivant le cercle unitaire. On suppose qu'il ne dispose que d'un accéléromètre sujet à un bruit blanc gaussien $\mathbf{n}$:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{n}, \mathbf{n} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$$

avec $\mathbf{b} = 10^{-3} \text{m.s}^{-2}$ et $\Sigma = (10^{-2})^2 \mathbf{I}_2 [\text{m.s}^{-2}]^2$.

On peut construire un estimé de position $\hat{\mathbf{p}}$ en intégrant l'équation cinématique $\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{a}$ deux fois :

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \int_{\sigma=0}^t \int_{\xi=0}^{\sigma} \tilde{\mathbf{a}}(\xi) d\sigma d\xi$$

Cas de figure Bisounours : on se donne la position et la vitesse initiales $\hat{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{p}_0$ et $\dot{\hat{\mathbf{p}}}_0 = \dot{\mathbf{p}}_0$.

Dead reckoning III

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

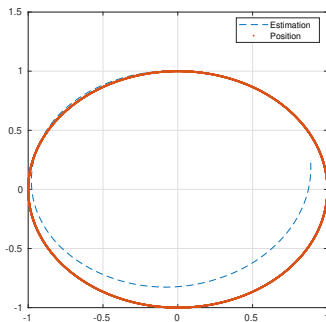


Figure – Résultat des simulations

- Nous nous devons de corriger cela !

Dead reckoning IV

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

- L'erreur provient du fait que **toutes les mesures sont internes**.

⇒ Nécessité d'introduire des mesures externes pour corriger la **dérive** (*drift*) d'intégration.

Position Fixing

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

Un capteur donnant des informations de **position fixing** (PF) est un capteur estimant une grandeur relative entre le **référentiel du robot** et le **référentiel global**.

Exemples

- Le **GPS** (donne un estimé de position) ;
- Une **caméra** (peut donner des positions relatives) ;
- Des **Balises *Ultra-Wide-Band* (UWB)** (donnent des distances entre des positions connues et le robot).

Le souci du PF est la **fréquence de rafraîchissement**. Mais combiné au DR il est redoutable et c'est ce qu'on va voir...

Plan de la section 3

Localisation de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman

Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

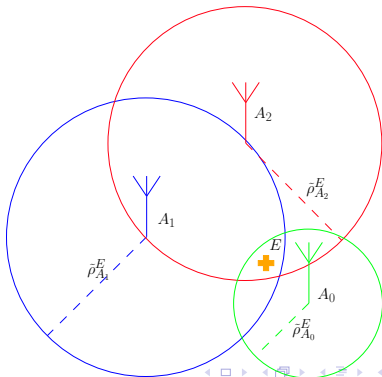
Lectures

- 1 Le problème de localisation
 - Formulation
 - Cinématique d'un robot 2D (UGV)
- 2 Types de mesures
 - *Dead Reckoning*
 - *Position Fixing*
- 3 Moindres carrés (LS, *Least Squares*)
 - Formulation du problème de multilatération
 - Méthode de Gauss-Newton
- 4 Filtrage de Kalman
 - Présentation
 - Exemple
- 5 Filtrage de Kalman Étendu
 - Présentation
 - Intégration dans un robot 2D
 - Simulations

Multilatération et moindres carrés I

Supposons que nous disposons d'un capteur PF nous donnant des rayons $\tilde{\rho}$ bruités entre le robot E de position $\mathbf{p}$ et de N ancre (stations) A_i à positions connues $\mathbf{a}_i$:

$$\tilde{\rho}_i = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{p}\|_2 + \nu, \quad \nu \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$



Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

Multilatération et moindres carrés II

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

On connaît la relation entre la vraie position $\mathbf{p}$ et la mesure ρ_i en l'absence de bruit (sans le tilde).

$$\rho_i = \|\mathbf{p} - \mathbf{a}_i\|_2 = f_i(\mathbf{p}).$$

Ceci est intéressant car pour trouver l'estimé $\hat{\mathbf{p}}$ de $\mathbf{p}$ qui colle le mieux il suffit de minimiser le résidu :

$$J(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} [f_i(\mathbf{p}) - \tilde{\rho}_i]^2$$

on peut utiliser $\tilde{\rho}_i$ car le bruit ν est supposé non-biaisé (à moyenne nulle). **Cette méthode s'appelle la méthode de moindre carrés**, et notre estimé vaut dans ce cas

$\hat{\mathbf{p}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{p}} J(\mathbf{p})$ c'est-à-dire que $\min(J(\mathbf{p})) = J(\hat{\mathbf{p}})$.

Résolution : méthode de Gauss-Newton

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman

Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

On peut utiliser une **descente de gradient** pour résoudre le problème. On se donne un estimé initial $\hat{\mathbf{p}}_0$ et on applique la formule de récurrence suivante :

$$\hat{\mathbf{p}}_i = \hat{\mathbf{p}}_{i-1} + (\mathbf{D}_r^\top \mathbf{D}_r)^{-1} \mathbf{D}_r^\top \mathbf{r},$$

$\mathbf{p}_i$ sont les estimés à l'étape i on s'arrête lorsque $\|\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_{i-1}\| < \epsilon$ qui est un seuil à fixer.

$\mathbf{r}$ est le vecteur des résidus ayant pour composantes $r_i = f_i(\hat{\mathbf{p}}) - \tilde{p}_i$.

$\mathbf{D}_r$ est la jacobienne $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}}$ (matrice "2 lignes" ($2 \times N$) une pour x , une pour y).

Discussion de la pertinence des Moindres Carrés (LS)

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

Avantages

- Robuste au bruit ;
- Implémentations facilement trouvables sur tous les langages (cherchez sur les internets *least-squares* ;)) sur Matlab fonction `lsqnonlin()`.

Inconvénients

- Ne prennent pas en compte la dynamique et les mesures de DR ;
- On doit tout recommencer à chaque nouvelle position de calcul ;
- Cette méthode est itérative, elle coûte du temps de calcul.

Plan de la section 4

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

- 1 Le problème de localisation
 - Formulation
 - Cinématique d'un robot 2D (UGV)
- 2 Types de mesures
 - *Dead Reckoning*
 - *Position Fixing*
- 3 Moindres carrés (LS, *Least Squares*)
 - Formulation du problème de multilatération
 - Méthode de Gauss-Newton
- 4 Filtrage de Kalman
 - Présentation
 - Exemple
- 5 Filtrage de Kalman Étendu
 - Présentation
 - Intégration dans un robot 2D
 - Simulations

Idée du Filtre de Kalman (KF)

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation
Formulation
Cinématique

Capteurs
Dead Reckoning
Position Fixing

Moindres
carrés
Formulation
Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation
Exemple

EKF
Présentation
Intégration dans
un robot 2D
Simulations

Lectures

Problème d'estimation

On veut estimer un vecteur $\mathbf{x}$ donc on connaît à une incertitude $\boldsymbol{\omega}$ près la dynamique, disposant de mesures $\mathbf{y}$ bruitées par le vecteur $\boldsymbol{\nu}$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\nu}. \end{cases} \quad (1)$$

$\mathbf{u}$ est une éventuelle entrée du système (ex : forces des moteurs sur votre robot).

D'où vient le KF ?

Si $\boldsymbol{\omega}$ et $\boldsymbol{\nu}$ sont des vecteurs gaussiens non-biaisés ($\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_i)$) alors le **filtre de Kalman** est calculé comme étant le **filtre optimal**¹ dans ce cas.

1. Il minimise la variance des estimés et n'est pas biaisé

Équations de filtrage I

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

On discrétise l'équation différentielle précédente et on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\omega}_k, & \boldsymbol{\omega}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\omega}) \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\nu}_k, & \boldsymbol{\nu}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\nu}) \end{cases} \quad (2)$$

Étape 0 : Initialisation

Mon estimé initial est $\hat{\mathbf{x}}_0$ si possible $\mathbb{E}(\mathbf{x}_0)$.

Ma variance (incertitude) initiale est $\Sigma_0 = K \Sigma_{\omega}$, on peut ajuster K en fonction de la confiance sur ledit estimé $\hat{\mathbf{x}}_0$.

Équations de filtrage II

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

Étape 1 : Prédiction (j'ai une dynamique... et je l'intègre !)

La prédiction (pour $k > 0$) :

$$\mathbf{x}_k^{pred} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k,$$

La variance de la prédiction :

$$\Sigma^{pred} = \mathbf{A}_k \Sigma_k \mathbf{A}_k^T + \Sigma_\omega.$$

Étape 2 : Gain optimal de Kalman

Ce gain sert à régler le dilemme **prédiction/mesure** :

$$\mathbf{G}_k = \Sigma^{pred} \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \Sigma^{pred} \mathbf{C}_k^T + \Sigma_\nu)^{-1}.$$

Grosso modo il correspond à $\frac{\text{incertitude prédiction}}{\text{incertitudes mesures} + \text{prédiction}}.$

Équations de filtrage III

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres

carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman

Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

Étape 3 : Correction des estimés en intégrant les mesures

On va calculer la différence entre prédiction et mesure :
l'innovation (terme de "surprise") :

$$\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^{pred}$$

On obtient l'estimé final :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^{pred} + \mathbf{G}_k \mathbf{i}_k,$$

Et sa variance :

$$\Sigma_k = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{C}_k) \Sigma_k^{pred}.$$

On retourne à l'étape 1 ensuite et on effectue l'étape 3 dès que des mesures $\mathbf{y}$ sont disponibles.

Trajectoire d'un robot monovariable

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman

Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

Énoncé :

Supposons un robot sur un axe x avec pour états sa vitesse et sa position $\mathbf{x} = [x, v]^T$. Le robot se balade sur $x > 0$ et on veut le localiser.

Un dispositif UWB situé en $x = 0$ (pour simplifier) nous donne le rayon $\rho = x + v$ avec $v \sim \mathcal{N}(0, 0.1^2)$ (bruit de mesure de 10 centimètres) toutes les secondes.

On ne connaît pas la dynamique du robot mais on sait que le robot a une accélération de variance 0.07m/s^2 .

La cinématique du robot est donnée par la simple équation $v = \dot{x}$ (on ne connaît malheureusement pas $\mathbf{u}$) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}, \quad y = \rho = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}.$$

Mise en équation pour le Kalman

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation
Formulation
Cinématique

Capteurs
Dead Reckoning
Position Fixing

Moindres
carrés
Formulation
Gauss-Newton

Kalman
Filter
Présentation
Exemple

EKF
Présentation
Intégration dans
un robot 2D
Simulations

Lectures

Notre modèle est en temps continu... discrétisons-le :

$$\mathbf{A}_k(\delta t) = \exp \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta t \right) = \mathbf{I}_2 + \mathbf{A} h_k \text{ (}\mathbf{A} \text{ est nilpotente !)}.$$

et $\mathbf{C}_k = \mathbf{C}$ car l'observation de x est indépendante du temps (et donc de la discrétisation).

Les matrices Σ_ν et Σ_ω ?

- Clairement $\Sigma_\nu = 0.1^2$.
- Pour Σ_ω il faut discrétiser, le bruit est sur l'accélération la dérivée de v : on suppose donc que $\Sigma_\omega^{continu} = \text{diag}(0, 0.07^2)$. En discrétisant :

$$\Sigma_\omega = \int_{t=0}^{h_k} \mathbf{A}_k(t) \Sigma_\omega^{continu} \mathbf{A}_k^T(t) dt = 0.07^2 \begin{bmatrix} h_k^3/3 & h_k^2/2 \\ h_k^2/2 & h_k \end{bmatrix}.$$

Simulations I

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

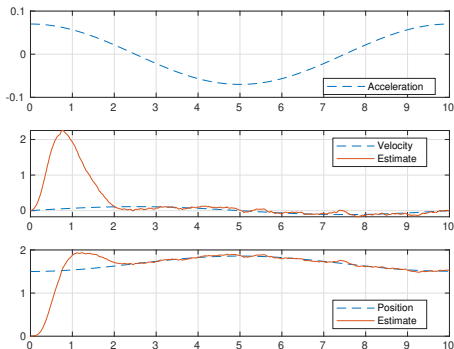


Figure – Résultats obtenus après filtrage de Kalman

Simulations II

Localisation de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation
Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning
Position Fixing

Moindres carrés

Formulation
Gauss-Newton

Kalman Filter

Présentation
Exemple

EKF

Présentation
Intégration dans
un robot 2D
Simulations

Lectures

- L'algorithme est récursif donc coûte moins en termes de calcul.
- Cela fonctionne bien (robustesse aux erreurs d'estimation initiales, convergence assurée malgré le bruit de mesure...) mais...
- Nous aurions pu estimer l'accélération, dans notre modèle on suppose $a = 0$;
- Le problème est ici que le cas est en 1D... ce qui rend les **distances linéaires** si la mesure est toujours strictement positive (arnaque de ma part). Il faut développer une théorie de Kalman non-linéaire !

Plan de la section 5

Localisation de robots

Justin Cano

Capteurs

EKF

Lectures

- 1 Le problème de localisation
 - Formulation
 - Cinématique d'un robot 2D (UGV)
- 2 Types de mesures
 - *Dead Reckoning*
 - *Position Fixing*
- 3 Moindres carrés (LS, *Least Squares*)
 - Formulation du problème de multilatération
 - Méthode de Gauss-Newton
- 4 Filtrage de Kalman
 - Présentation
 - Exemple
- 5 Filtrage de Kalman Étendu
 - Présentation
 - Intégration dans un robot 2D
 - Simulations

Équations de filtrage : linéarisation I

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation
Formulation
Cinématique

Capteurs
Dead Reckoning
Position Fixing

Moindres
carrés
Formulation
Gauss-Newton

Kalman
Filter
Présentation
Exemple

EKF
Présentation
Intégration dans
un robot 2D
Simulations

Lectures

Se plaçant dans un cas **non-linéaire** on a :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3)$$

On va réécrire les équations du filtre de Kalman en utilisant en lieu et place des matrices **A** et **C** des **Jacobiennes** prises à l'état estimé précédent. Le Filtrage de Kalman Étendu (EKF) est *une linéarisation du Filtrage de Kalman*.

$$\mathbf{A}_k := \left. \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k}, \mathbf{C}_k := \left. \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k}$$

ces deux matrices seront à **mettre** à jour à chacune des itérations de l'EKF.

Équations de filtrage : linéarisation II

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman

Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

On reprend strictement la même chose que pour le KF.

Étape 1 : On utilise f

$$\mathbf{x}_k^{pred} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + h_k \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k),$$

La variance de la prédiction... :

$$\Sigma^{pred} = \mathbf{A}_k \Sigma_k \mathbf{A}_k^T + \Sigma_\omega.$$

Étape 2 : Gain optimal approximé de Kalman

Il est inchangé :

$$\mathbf{G}_k = \Sigma_k^{pred} \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \Sigma_k^{pred} \mathbf{C}_k^T + \Sigma_\nu)^{-1}.$$

Équations de filtrage : linéarisation III

Étape 3 : Correction des estimés en intégrant les mesures

Vu que nous connaissons $\mathbf{g}$ on peut l'utiliser dans le calcul de l'innovation :

$$\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_k^{pred})$$

On obtient l'estimé final, inchangé :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^{pred} + \mathbf{G}_k \mathbf{i}_k,$$

Et sa variance qui demeure inchangée :

$$\Sigma_k = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{C}_k) \Sigma_k^{pred}.$$

On retourne à l'étape 1 ensuite et on effectue l'étape 3 dès que des mesures $\mathbf{y}$ sont disponibles.

Remarque

L'EKF converge de manière robuste en pratique mais n'est plus optimal (le KF l'est ssi le modèle est linéaire).

Modèle cinématique : fonction f

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

On reprend notre cher robot 2D, ses états sont $\mathbf{x} = [x, y, v_t, \theta, \omega]^T$. Que vaut f ? En l'absence d'entrée $\mathbf{u}$ elle vaut :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} v_t \cos(\theta) \\ v_t \sin(\theta) \\ 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

la partie non linéaire est en rouge c'est une conversion entre la vitesse tangentielle v_t et les deux vitesses axiales $\dot{x}$ et $\dot{y}$.

Les zéros proviennent du fait que nous avons pas de dynamique ici ($\mathbf{u}$ n'est pas prise en compte) sinon il y aurait des équations différentielles.

Modèle cinématique : fonction f II

La jacobienne vaut :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta) & -v_t \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & v_t \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pour discrétiser la dynamique suivant un pas h_k on utilisera simplement Euler :

$$\mathbf{x}_k \approx \mathbf{x}_{k-1} + h_k \dot{\mathbf{x}}_k \approx \mathbf{x}_{k-1} + h_k \mathbf{A}(\mathbf{x}_{k-1}) \mathbf{x}_{k-1}$$

ce qui fait que la matrice $\mathbf{A}_k$ implémentée pour la prédiction vaudra :

$$\mathbf{x}_k^{pred} \approx \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \quad \mathbf{A}_k = \mathbf{I}_5 + h_k \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$$

Capteurs... : fonctions g_i |

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

En général pour un robot au sol, les IMU sont de mauvaises qualité : il ne faut pas utiliser l'accéléromètre.

On utilise

- 1 Un **magnétomètre** sur un seul de ses axes qui nous donnera $\tilde{\theta}$;
- 2 L'odométrie **des encodeurs des roues** qui nous donnera $\tilde{\omega}$ et $\tilde{v}_t$;
 - Si R_i sont les rayons des roues droites et gauche et ω_i leur vitesse de rotation ;
 - Alors [Cano, 2019] on a (voir schéma slide 7) :
$$v_t = \frac{\omega_g R_g + \omega_d R_d}{2} \text{ et } \omega = \frac{\omega_g R_g - \omega_d R_d}{L}.$$
- 3 Un **système de balises UWB** qui nous donnera un estimé de distance ρ_i , distance d'un ancre A_i à position connue $\mathbf{a}_i$ au robot.

Capteurs... : fonctions g_i II

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman

Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

Il existe trois sortes de mesures, la fonction g peut prendre trois formes différentes.

Respectivement :

$$1 \quad g_1(\mathbf{x}) = \theta \Rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \quad g_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \omega_g \\ \omega_d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_g/2 & 0 & R_g/L \\ 0 & 0 & R_d/2 & 0 & -R_d/L \end{bmatrix}$$

3 Pour l'UWB, avec les ancrs $A_i = (a_i^x, a_i^y)$, on a :

$$g_3(\mathbf{x}) = \rho_i = \sqrt{(x - a_i^x)^2 + (y - a_i^y)^2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{x - a_i^x}{\rho_i} & \frac{y - a_i^y}{\rho_i} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ces trois fonctions et leur jacobienne seront appelées en fonction des mesures disponibles. Les Σ_ν changent en fonction des caractéristiques des capteurs (voir code).

Simulations I

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

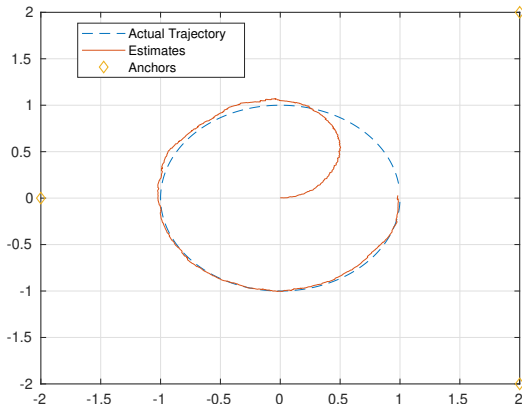


Figure – Trajectoire traquée et estimés.

Simulations II

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures

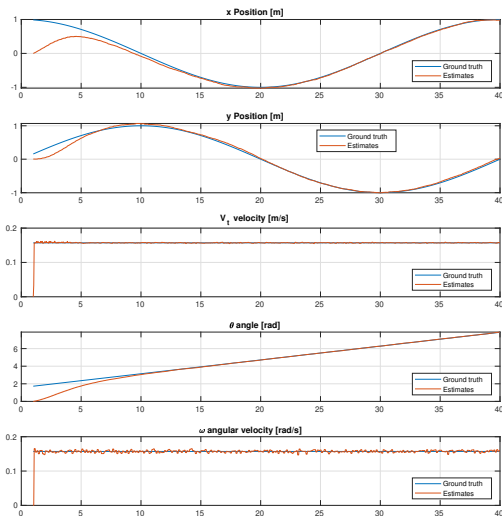


Figure – Chronogramme des états.

- À lire impérativement (bouquin très abordable théoriquement avec des **codes et des exemples**) : [Kovvali et al., 2013] ;
- Chui et Chen, bouquin de référence sur le KF : [Chui and Chen, 1999] ;
- Le mémo sur les robots 2D sur mon site sur le déploiement des robots <http://justincano.com> (la cinématique y est expliquée) ;
- Intégration sur un robot 2D avec formulation dynamique, mon mémoire, Chapitre IV, bien plus rigoureux : [Cano, 2019] ;
- Codes en Python et Matlab de démonstration, mon repo : https://gitlab.com/nitraced/ekf_uwb_demos un autre repo existe en C sur mon compte gitlab (nitraced).

Bibliographie

Localisation
de robots

Justin Cano

Localisation

Formulation

Cinématique

Capteurs

Dead Reckoning

Position Fixing

Moindres
carrés

Formulation

Gauss-Newton

Kalman
Filter

Présentation

Exemple

EKF

Présentation

Intégration dans
un robot 2D

Simulations

Lectures



Cano, J. (2019).

Synchronisation et positionnement simultanés d'un réseau ultra-large bande et applications en robotique mobile.

Master's thesis, Polytechnique Montréal, Montreal, QC, Canada.

https://publications.polymtl.ca/3818/1/2019_JustinCano.pdf.



Chui, C. K. and Chen, G. (1999).

Kalman filtering : with real-time applications.

Number 17 in Springer series in information sciences.
Springer, Berlin ; New York, 3rd ed edition.



Kovvali, N., Banavar, M., and Spanias, A. (2013).

An Introduction to Kalman Filtering with MATLAB Examples, volume 6.