

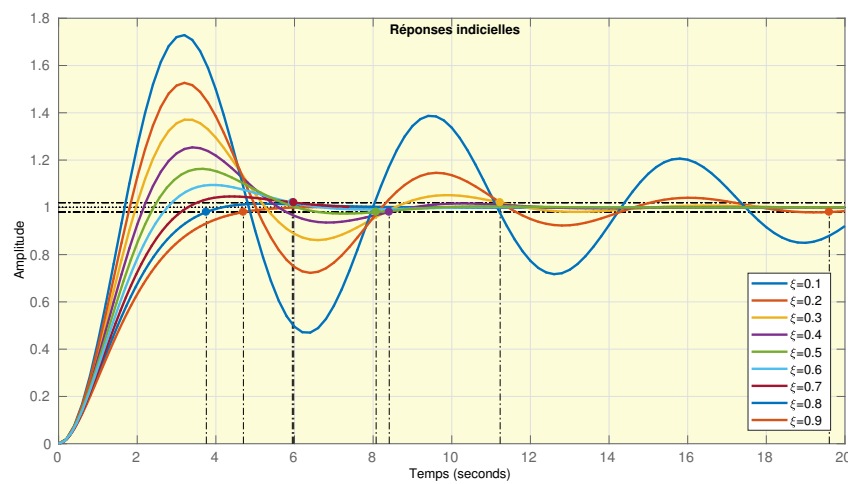
NOTES DE COURS

Téléchargeables sur
[HTTP://JUSTINCANO.COM](http://JUSTINCANO.COM)

Automatique des systèmes linéaires

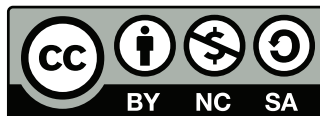
Justin CANO
Polytechnique Montréal.

Deuxième édition.



Version du
2 août 2021

Cette œuvre est mise à disposition sous licence Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 3.0 France. Pour voir une copie de cette licence, visitez <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/fr/> ou écrivez à Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.



[Voir le texte intégral de la licence.](#)

Table des matières

1	Introduction	1
I	But du document	1
II	Exemple introductif	2
III	Définir un problème de commande	3
III.A	Pourquoi faire de la correction ?	3
III.B	Modéliser le problème	3
III.C	Un système physique	5
III.D	Esprit de la matière et contenu des notes	6
IV	Un exemple célèbre d'asservissement	7
I	Outils et notations	9
2	Quelques rappels d'analyse ★	10
I	Notations usuelles employées	10
II	Notions élémentaires	11
II.A	Polynômes	11
II.B	Nombres complexes	12
III	Résolution d'EDLC d'ordre 2	14

III.A	Définition	14
III.B	Forme canonique d'une EDLC2	14
III.C	Régimes possibles des solutions d'une EDLC2	16
IV	Résolution d'EDLC d'ordre 1	25
IV.A	Définition	25
IV.B	Forme canonique	25
3	Notations mathématiques utilisées en algèbre ★	28
I	Opérateurs vectoriels	28
II	Opérateurs matriciels	29
II.A	Matrices	29
II.B	Trace et norme	30
II.C	Produit matriciel usuel et produit de Kronecker	30
II.D	Déterminant d'une matrice	31
III	Éléments d'algèbre	32
III.A	Inverse Matriciel	32
III.B	Changement de Base	34
III.C	Algèbre spectrale	35
IV	Notation pour l'analyse multivariable	37
IV.A	Dérivées	37
IV.B	Généralisation des EDLC1	37
II	Analyse des systèmes asservis	39
4	Plan de Laplace	40
I	Transformée de Laplace	41
I.A	Définitions fondamentales	41
I.B	Quelques propriétés	42
I.C	Distribution de Dirac et fonction échelon	47
I.D	Quelques transformées usuelles	49
II	Fonctions de transfert	52
II.A	Expressions à partir d'équations différentielles	52

II.B	Stabilité des systèmes linéaires	55
II.C	Précision des systèmes asservis	62
II.D	Calculs sur la rapidité et les dépassements	70
II.E	Dépassements des systèmes asservis	73
III	Preuve du théorème de la valeur finale	75
5	Quelques notes sur l'identification des systèmes ★	77
I	Méthodes graphiques	78
I.A	Identification d'un système de premier ordre	78
I.B	Identification d'un système de deuxième ordre oscillant	79
II	Autres méthodes graphiques	81
II.A	Approximation par modèle de Broïda	81
II.B	Approximation par modèle de Strejc	82
III	Estimation par moindres-carrés non-linéaires	84
III.A	Équation de mesure de la réponse à l'échelon	85
III.B	Éléments de théorie	85
III.C	Application	88
III	Conception des systèmes asservis	95
6	Conception directe dans le plan de Laplace	96
I	Notions géométriques dans le plan de Laplace	96
I.A	Région de stabilité	97
I.B	Rapidité	98
I.C	Marge oscillatoire	101
I.D	Cercle d'effort	103
I.E	Marges de premier pic	104
II	Contrôleurs à action simple	105
II.A	Action Proportionnelle	105
II.B	Action Intégrale	106
II.C	Action Dérivée	108
III	Actions Combinées	109

III.A	Compensateur Proportionnel-Intégral	109
III.B	Compensateur Proportionnel-Dérivé	110
III.C	Compensateur Proportionnel-Intégral-Dérivé	110
III.D	Compensateur Proportionnel-Intégral-Dérivé <i>Feedforward</i> . . .	111
IV	Placement des pôles avec les contrôleurs	112
IV.A	Placement par calcul direct	112
IV.B	Lieu des racines d'Evans	115
7	Commande fréquentielle	123
I	Notions fondamentales	123
I.A	Gain et phase relative	124
I.B	Filtre linéaire	125
II	Outils d'analyse	126
II.A	Diagrammes de Bode	126
II.B	Critère de Nyquist	137
II.C	Marges de stabilité	152
II.D	Lieu de Black-Nichols ★	156
III	Compensateurs fréquentsiels	162
III.A	Cahier des charges fréquentiel	162
III.B	Compensateur à avance de phase	165
III.C	Compensateur à retard de phase	169
IV	Réglages de Ziegler-Nichols pour un PID ★	175
8	Introduction à la commande moderne	179
I	Espace d'état	180
I.A	Représentation d'état de Kalman	181
I.B	Lien avec les fonctions de transfert dans le domaine de Laplace	182
I.C	Systèmes commandables	184
I.D	Systèmes observables	187
II	Compensation dans l'espace d'état	191
II.A	Placement de pôles par retour d'état	191
II.B	Observateurs de Luenberger	199

II.C	Un exemple de conception complet sur Matlab commenté . . .	202
A	À propos du document	i
I	Mot de l’auteur	i
II	Versions du document, errata & améliorations	iii
B	Éléments d’algèbre des schémas-blocs	vi
I	Opérations élémentaires	vi
I.A	Blocs et opérandes	vi
I.B	Blocs en parallèle	vii
I.C	Blocs en série	vii
II	Boucles	viii
III	Un exemple résolu de réduction de schéma-blocs	ix

Table des figures

1.1	Représentation typique du problème d'asservissements.	4
1.2	Régulateur de Watt.	8
1.3	Schéma-blocs de l'asservissement du régulateur de Watt.	8
2.1	Plan complexe, partie réelle, imaginaire, argument et module.	12
2.2	Tracé d'une solution apériodique d'une EDLC2.	18
2.3	Tracé d'une solution pseudo-périodique d'une EDLC2.	21
2.4	Tracé d'une solution de régime critique d'une EDLC2.	21
2.5	Tracé d'une solution harmonique d'une EDLC2.	23
2.6	Solution d'une équation différentielle d'ordre 1.	27
4.1	Représentation de la fonction de Dirac.	47
4.2	Représentation de la fonction d'Heaviside.	48
4.3	Circuit RC série	53
4.4	Modèle générique d'un asservissement linéaire SISO en en schéma-blocs.	63
4.5	Transformation d'un schéma à retour quelconque en un problème à retour unitaire.	64
4.6	Schéma-blocs générique d'un système linéaire SISO perturbé à retour unitaire.	65

4.7	Schéma-blocs du rejet de perturbation.	67
4.8	Abaque montrant l'évolution du temps de réponse normalisé en fonction du coefficient d'amortissement.	72
4.9	Illustration du dépassement pour un système d'ordre deux.	74
5.1	Identification graphique d'un système de premier ordre	79
5.2	Identification graphique d'un système de deuxième ordre.	80
5.3	Modèle de Broïda.	82
5.4	Modèle de Strejc.	83
5.5	Distribution gaussienne centrée.	89
5.6	Génération des mesures	91
5.7	Moindres-carrés appliqués pour identifier les paramètres.	93
6.1	Région de stabilité du plan S.	97
6.2	Visualisation polaire du plan de Laplace.	98
6.3	Visualisation du critère de rapidité.	99
6.4	Réponse indicielle de $F(s)$	101
6.5	Plan de Laplace avec les pôles de $F(s)$ marqués par des croix.	101
6.6	Plan de Laplace avec marges de rapidité et d'oscillation.	102
6.7	Plan de Laplace avec marges de rapidité et d'oscillation et cercle d'effort.	103
6.8	Marges de premier pic dans le plan de Laplace.	104
6.9	Schéma-blocs du contrôleur proportionnel.	106
6.10	Schéma-blocs du contrôleur intégral.	107
6.11	Schéma-blocs du contrôleur proportionnel-intégral.	109
6.12	Schéma-blocs du contrôleur proportionnel-dérivé.	110
6.13	Schéma-blocs du contrôleur proportionnel-intégral-dérivé.	111
6.14	Schéma-blocs du contrôleur proportionnel-intégral-dérivé et <i>feedforward</i>	112
6.15	Asservissement PI proposé.	113
6.16	Réponse à l'échelon du système asservi.	115
6.17	Lieu des racines étudié.	118
6.18	Lieu des racines étudié.	120
6.19	Superposition du lieu des racines et de la région admissible.	121

7.1	Diagrammes de Bode approchés et analytiques en amplitude pour un système du premier ordre générique.	130
7.2	Diagrammes de Bode approchés et analytiques en phase pour un système du premier ordre générique.	131
7.3	Diagrammes de Bode exacts pour un système $\omega_0 = 1$ rad/s et à amortissement ξ variable.	132
7.4	Tracé asymptotique des diagrammes de Bode la fonction de transfert F .135	
7.5	Tracé numérique des diagrammes de Bode la fonction de transfert F sur Matlab.	136
7.6	Système utilisé générique pour le critère de stabilité de Nyquist. . . .	138
7.7	Contour Γ «classique» de Bromwich.	139
7.8	Contour évitant un intégrateur sur l'axe des imaginaires.	141
7.9	Contour évitant des pôles conjugués sur l'axe des imaginaires. (★) . .	141
7.10	Diagrammes de Bode approchés.	144
7.11	Construction approchée du contour, région (2).	144
7.12	Contour de Nyquist approché.	145
7.13	Tracé du diagramme de Nyquist exact de l'exemple 7.2.	146
7.14	Tracé de l'opposé de la fonction inverse.	146
7.15	Tracé 2.	148
7.16	Diagrammes de Bode approchés.	149
7.17	Visualisation de la fermeture du lieu de Nyquist.	151
7.18	Diagramme de Bode de $F(s)$	154
7.19	Diagrammes de Nyquist en fonction du retard L	156
7.20	Diagrammes de Bode de $F(s)$	158
7.21	Diagramme de Black-Nichols de $F(s)$	159
7.22	Abaque de Black.	161
7.23	Système générique à retour unitaire.	162
7.24	Illustration du lien entre amortissement et marge de phase.	164
7.25	Diagrammes de Bode d'un CAAP	166
7.26	Diagrammes de Bode de $KF(s)$	168
7.27	Diagrammes de Bode de $C(s)F(s)$	169
7.28	Réponses temporelles du système en boucle fermée.	170

7.29	Diagrammes de Bode d'un CARP.	171
7.30	Diagrammes de Bode de $KF(s)$	173
7.31	Diagrammes de Bode de $C(s)F(s)$	173
7.32	Réponse temporelle du système compensé en boucle fermée.	174
7.33	Essai de pompage : détermination de K_u et T_u	177
7.34	Système bouclé avec un contrôleur PD.	177
8.1	Système physique et retour d'état.	191
8.2	Système asservi par retour d'état et gain de précommande.	197
8.3	Système asservi par retour d'état et action intégrale.	198
8.4	Structure d'un système asservi par un observateur de Luenberger.	200
8.5	Illustration du système étudié.	203
8.6	Réponse à l'échelon unitaire du pendule par retour d'état ou non.	208
8.7	Résultat de l'implémentation de l'observateur.	210
8.8	Résultat de l'implémentation de l'observateur avec retour d'état intégral.	212
8.9	Implémentation du contrôleur de l'observateur et du système sur Simulink.	213

Liste des tableaux

4.1	Table des transformées usuelles de Laplace	49
5.1	Valeurs tabulées pour la méthode de Strejc.	84
7.1	Table des gains de la méthode de Ziegler-Nichols	175

Glossaire

BIBO *Bounded Input Bounded Output*. 24, 25, 56, 97

CAAP Compensateur à Avance de Phase. 163, 166, 168, 170

CARP Compensateur à Retard de Phase. 167, 173

EDLC Equation Différentielle Linéaire à coefficients Constants. 14, 25, 26, 40, 52–54, 65, 120

LTI *Linear Time Invariant*.. 6, 7

NMSE Erreur Quadratique Moyenne Normalisée, *Normalized Mean Square Error*. 93

SA Stabilité Asymptotique. 25

SISO *Single Input Single Output*. 6, 52

Introduction

I But du document

Ces notes de cours en automatique sont la deuxième version des notes de Justin Cano, Département de Génie Électrique, Polytechnique Montréal (DGEPM). Pour en savoir plus sur leur évolution et les *errata* voir l'annexe A.

Pour cette version ont contribué activement Roland Malhamé, professeur au DGEPM et Samuel Muhindo, étudiant au doctorat au DGEPM. En effet, le but de cette édition est de fournir un support complémentaire de qualité pour le cours *ELE3201 Asservissements* de Polytechnique Montréal. Toutefois, la rédaction de ces notes ayant débuté indépendamment en 2017, il est possible de noter quelques différences mineures de notation ou bien d'ordre de présentation.

En vous souhaitant une bonne lecture,

JUSTIN CANO, ROLAND MALHAMÉ ET SAMUEL MUHINDO.

Remarque : Les notes couvrent le cours *ELE3201* mais des éléments sont donnés dans ces notes en **bonus**, ces derniers sont des rappels (première partie du document) ou des extras non-exigibles pour les examens (reste du document). Les sections et chapitres concernés par cette remarque sont marqués par une **étoile rouge** (★). Il est toutefois suggéré au lecteur de lire ces parties.

II Exemple introductif

Nous commencerons ces notes par un exemple concret. Supposons un logement, appartenant à une certaine Alice, dans lequel nous souhaitons **réguler** la température.

L'**hiver** approchant, il est important pour cette dernière que l'intérieur ait une température **au-dessus de vingt degrés Celcius**. Alice dispose donc un **radiateur** électrique dont elle ajuste la puissance. La puissance est suffisante et la pièce est correctement chauffée.

Cependant, Alice n'est pas seule, son colocataire Bob, un peu étourdi ouvre la porte sans la refermer, **faisant chuter dramatiquement la température**. Alice, pour éviter que cela ne se reproduise décide d'installer un **thermostat** et réguler correctement la température.

Analyse sémantique de l'exemple :

- Alice a expérimenté un problème d'asservissement introduisant le **thermostat**, elle veut une régulation automatique de la température **selon des spécifications précises** ;
- Le logement est **le système** dont la température est **la variable à réguler**, soumise à **des perturbations** (l'hiver, Bob le distrait...) ;
- La température est régulée par un **radiateur**, il s'agit d'un **effecteur** qui produit une puissance thermique par effet Joule ;
- Le thermostat prend les décisions de l'ajustement de la température **en la mesurant**, c'est ce que l'on appelle un **compensateur** (ou contrôleur par anglicisme).

Le compensateur est nécessaire dans ce cas pour contrebalancer les étourderies de Bob.

III Définir un problème de commande

Un problème de **commande** typique peut être formulé de la façon suivante :

- ★ Données : Soit un système physique existant F , le système physique ayant un vecteur d'entrée u et un vecteur de sortie y .
- ★ Cahier des charges : On **veut** atteindre pour y des performances précises P qui ne sont pas remplies par F «naturellement».
- ★ Solution : On va rajouter un système auxiliaire correcteur C pour atteindre P .

Le problème est donc de concevoir C pour répondre au problème. Et ceci est l'objet du présent cours.

III.A Pourquoi faire de la correction ?

On se rend compte aisément qu'il est en règle générale impossible de décider sans aucune information quelle commande u appliquer pour résoudre notre problème. Pour revenir à notre exemple, le thermostat dispose d'un capteur et son usage est dimensionné en fonction de la grandeur du logement. En résulte la question suivante : comment concevoir un système autonome qui fournit u et qui remplit les objectifs d'un cahier des charges ?

Ceci est la principale problématique. Nous allons voir tout d'abord la théorie des systèmes dynamiques linéaires afin de comprendre comment un système évolue en fonction du temps. Pourquoi ? Nous nous devons d'intégrer la dynamique des systèmes au sein de la conception du contrôleur pour en maîtriser certains aspects essentiels (précision, temps de réponse, stabilité...). La modélisation dynamique fait appel à la théorie des équations différentielles.

III.B Modéliser le problème

Généralement, nous allons considérer le modèle-type suivant pour un problème d'asservissement :

Remarque : Les termes **asservissement**, **contrôle** ou bien **automatique** sont considérés souvent comme des synonymes, le long de cet ouvrage les trois précédents termes seront utilisés invariablement.

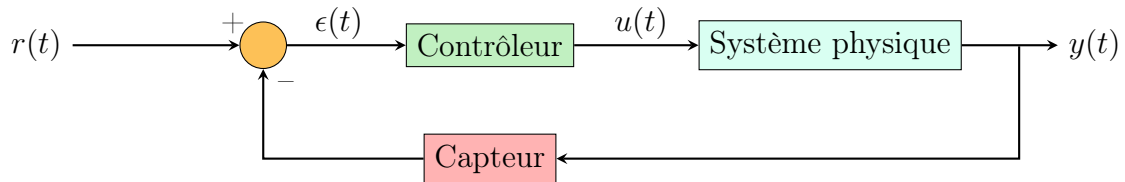


FIGURE 1.1 – Représentation typique du problème d’asservissements.

Nous pouvons considérer le **formalisme des schémas-blocs** pour les problèmes d’asservissements, nous donnons une explication de ce dernier en annexe B. La raison est simple, un **bloc** représente un (sous)-système doté d’une (ou plusieurs) **entrées/-sorties** et d’une **fonction** qui lui est propre. Ainsi, on est capable de discerner les différents modèles facilement.

On veut que la sortie du signal $y(t)$ égale une référence donnée $r(t)$ pour les spécifications du **cahier des charges**.

Nous pouvons remarquer en premier lieu que le **système physique** est inclus dans une **boucle d’asservissement**. Certes mais de quoi est-elle composée ?

- Tout d’abord le **système physique** (aux performances non suffisantes au regard du cahier des charges¹) nous lui donnerons la notation **F** pour la suite de l’ouvrage. C’est lui qui est au cœur du système, on cherche à asservir sa **sortie** $y(t)$ en agissant sur sa **commande** $u(t)$ afin qu’elle corresponde à la **consigne** $r(t)$. On le notera comme suit² :

$$F(s)$$

- Un **capteur** qui donne des informations sur la sortie $y(t)$ **en temps réel** permettant la correction. Nous lui donnerons la notation **B** :

1. Auquel cas ne rien faire pour l’améliorer est une solution admissible.
 2. La notation s sera expliquée au chapitre spécifique portant sur les transformées de Laplace.



- Un **comparateur**, faisant la différence suivante $\epsilon(t) = r(t) - y_{\text{capteur}}(t)$. Il est noté ainsi :



- Et enfin, la pièce que **vous allez construire** à l'issue de cette lecture, le **contrôleur**. Il prend en entrée l'écart entre la **référence** et la **mesure de la sortie** $\epsilon(t)$ et fournit la commande $u(t)$ au **système physique**. On le notera ainsi :



Remarque : Les cas de systèmes multivariables, bien que non traités en première approche, sont généralisables à cette représentation. Il suffit de substituer toutes les valeurs scalaires en vecteurs afin d'obtenir une formulation adéquate.

III.C Un système physique



Contrôler un système implique sa *connaissance*. **Modéliser** le système avec des équations est nécessaire avant toute conception d'asservissement.

Le **système physique**, que nous supposons **linéaire** dans ce document est régi par des équations différentielles. On rappellera au cours du chapitre 2 la façon de les résoudre. D'une façon générale, dans le cas monovariable³ on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^M \alpha_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \kappa, \quad (N, M) \in \mathbb{N}^2, \quad \kappa \in \mathbb{R}, \quad N > M. \quad (1.1)$$

Où $u(t)$ est l'entrée du système et $y(t)$ la sortie.

3. Une sortie et une entrée dans tout le système.



Exemple 1.1 : Contrôle d'altitude Soit un repère spatial $(0, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ Soit un objet de masse m dans un champ de gravité d'accélération $\mathbf{g} = -g\mathbf{z}$ mais qui dispose d'un propulseur de force ajustable $f(t)\mathbf{z}$. Si on applique le principe fondamental de la dynamique (2e équation de Newton) on obtient :

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F}_{ext} &= m\mathbf{a}(t) = m \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2}, \\ \Leftrightarrow -mg\mathbf{z} + f(t)\mathbf{z} &= m \frac{d^2 \mathbf{z}}{dt^2}, \\ \text{projection sur } \mathbf{z} \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{f(t)}{m} - g.\end{aligned}$$

On se rend compte que l'altitude $z(t)$ peut être contrôlée en ajustant $f(t)$. On peut écrire $z(t) = y(t)$ et $f(t) = u(t)$ afin de modéliser notre problème de commande.



Un **système** *Single Input Single Output* (SISO) est un système **monovariable** en entrée et en sortie. L'équation 1.1 est une équation de ce type de système car la sortie y et l'entrée u sont des **scalaires** réels et non des **vecteurs** présentant plusieurs composantes.

Remarque : Nous étudierons majoritairement les systèmes SISO le long de ces notes. De plus nous supposerons les systèmes comme étant *Linear Time Invariant*. (LTI) c'est-à-dire à paramètres constants (indépendants du temps) et linéaires.

III.D Esprit de la matière et contenu des notes

L'automatique passe nécessairement par la résolution d'équations différentielles. Nous verrons dans la *première partie* de ces notes un rappel sur ces dernières puis les conséquences de ces résultats fondamentaux seront rappelés le long des chapitres. Quelques notes liminaires d'algèbre sont présentes également.

Les asservissements passent par la **modélisation** et l'**analyse** des systèmes. En effet, il faut caractériser le système avant de le modifier : un asservissement est une modification d'une équation différentielle. Des outils spécifiques s'imposent autant dans l'**identification** que dans l'analyse des **performances**. Ceci sera abordé dans la *seconde partie* de ce cours.

Ensuite, le paradigme du contrôle est polymorphe dans ses actions. Utiliser des outils de transformation de type **Laplace** pour les systèmes **LTI** en est un car leur manipulation est aisée sous des hypothèses fortes. Un autre axe est de considérer la commande comme faisant partie intégrale du **filtrage fréquentiel**, ceci est vrai puisqu'un filtre est une équation différentielle. Ce concept est ancien : il ne nécessite que peu de calculs et d'informations pour concevoir un asservissement, ce qui l'a rendu populaire lorsque les calculateurs étaient peu répandus. Enfin, le paradigme de la **commande moderne** utilise directement sous forme matricielle les équations différentielles. Il tire profit de l'informatique et des résultats d'analyse numérique. Ce cheminement sera suivi au sein de la *troisième partie* de ce cours.

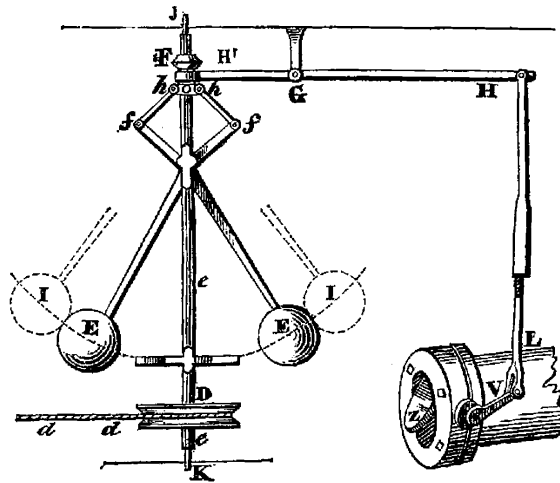
IV Un exemple célèbre d'asservissement

Un des exemples qui marqua durablement l'histoire de l'automatique est sans aucun doute le régulateur de **Watt**.

Mis au point par le célèbre ingénieur écossais *James Watt (1736-1819)*, inventeur de la machine à vapeur, il reste une des premières réalisations en automatique reconnue comme telle.

Le régulateur de Watt répond au problème de la constance de la vitesse dans les machines à vapeur. En effet, il est important pour des raisons d'usure des composants et les applications industrielles de maintenir une vitesse de rotation constante dans les arbres de sortie des machines à vapeur.

Ce dispositif utilise un mécanisme de rétroaction, un bouclage, en somme, pour arriver à ses fins. Les masselottes notées E sur la figure 1.2 tournent pendues par des bielles autour d'un axe qui est entraîné par l'arbre de sortie de la machine à vapeur. Si la vitesse augmente, alors les masselottes auront un équilibre plus en hauteur (position L sur le schéma), entraînant les bielles dans leur mouvement.



Source : *Wikimedia Commons*.

FIGURE 1.2 – Régulateur de Watt.

Ces dernières sont reliées à une soupape d'admission de la vapeur (notée v sur le schéma), qui lorsque la vitesse croît se referme et vice-versa. Le tout provoque un asservissement mécanique dont la rétroaction se fait par la force centrifuge à laquelle sont soumises les masselottes et la commande par l'admission de vapeur.

Notons que la rétroaction doit faire l'étude d'un calcul d'équilibre préalable puisque la vitesse de rotation de l'arbre qui conditionne la force centrifuge que ces dernières subissent n'est pas la même que la vitesse de sortie de la machine à vapeur. Cependant, une relation de proportionnalité (démultiplication) existe entre ces deux vitesses, rendant l'asservissement viable (et linéaire!).

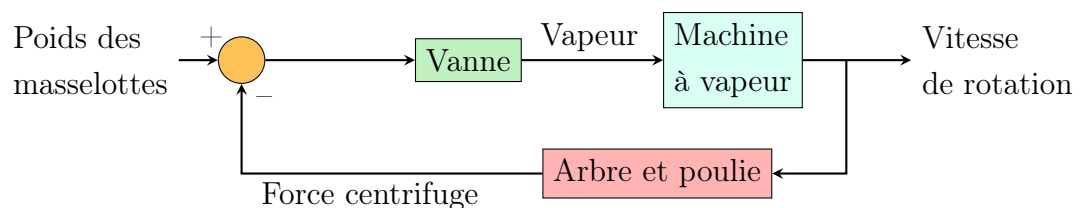
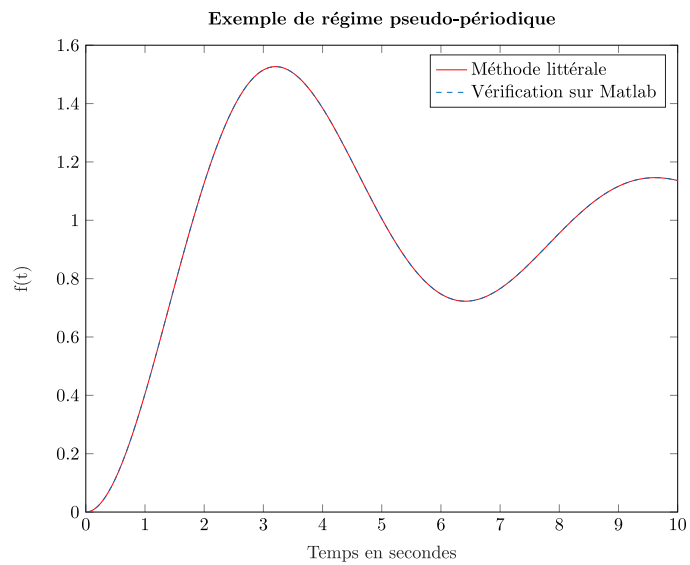


FIGURE 1.3 – Schéma-blocs de l'asservissement du régulateur de Watt.

Partie I

Outils et notations



Quelques rappels d'analyse ★

Remarque : Cette section n'est pas un cours de mathématiques mais seulement un petit rappel avant de se lancer dans l'aventure, nous faisons référence à plusieurs des techniques employées dans cette section par la suite.

I Notations usuelles employées

Les notations qui suivent seront employées le long du document :

- On note f' la dérivée d'une fonction monovariable $f : t \rightarrow f(t)$. On peut aussi la noter $\frac{df}{dt}$;
- Pour les dérivées d'ordre 2, nous notons pour f'' et $\frac{d^2f}{dt^2}$;
- Dans le cadre où la dérivée est partielle, on notera ∂t , en lieu et place de dt ;
- Sans perte de généralité, on notera les dérivées temporelles, partielles ou non avec la notation *point* comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{dt^2} = \ddot{f};$$

- On note j le nombre imaginaire de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ qui vérifie $j^2 = -1$;

II Notions élémentaires

II.A Polynômes

On rappelle en outre la résolution d'une équation de deuxième degré. On utilise la méthode du discriminant pour trouver les racines. Soit le polynôme d'ordre 2 générique à coefficients réels suivant :

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a \neq 0.$$

On définit les racines d'un polynôme comme suit :

$$x \text{ racine} \Leftrightarrow P(x) = 0.$$

Pour les trouver, il faut¹ calculer le discriminant Δ comme suit :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

En fonction de sa valeur, nous avons des solutions qui satisfont les équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{si } \Delta > 0 & \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \text{ racines de } P, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \\ \text{si } \Delta = 0 & \exists x_1 \in \mathbb{R} \text{ racine double de } P, \quad x_1 = \frac{-b}{2a}, \\ \text{si } \Delta < 0 & \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{C} \text{ racines de } P, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

j étant le nombre imaginaire caractérisant les nombres complexes ($j^2 = -1$).

Remarque : Tout polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i$ à coefficients réels a_i admet nécessairement des racines conjuguées ou réelles. C'est-à-dire qui vérifient :

$$P(r) = 0, r \in \mathbb{C}, \begin{cases} \Im(r) = 0, \\ \Im(r) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \exists r', \Im(r') = -\Im(r) \text{ et } \Re(r') = \Re(r),$$

cela se traduira par une **nécessaire symétrie des racines du polynôme par rapport à l'axe des réels**, propriété géométrique très utile.

1. On va dire que c'est la méthode «brute» qui marche sous de faibles hypothèses. Il en existe d'autres, voir notamment les méthodes de somme et de produit de racines...

II.B Nombres complexes

Un nombre complexe peut être vu comme un nombre à deux dimensions. Le cas générique est un nombre complexe d'affixe z comme suit :

$$z = x + jy, (x, y) \in \mathbb{R}, \quad j^2 = -1.$$

On définit deux quantités géométriques : **l'argument et le module**.

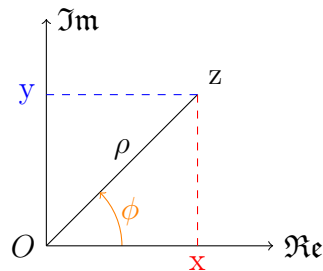


FIGURE 2.1 – Plan complexe, partie réelle, imaginaire, argument et module.

L'argument : que nous noterons ϕ ou φ est en fait l'angle entre l'axe des $\vec{x}$ du plan complexe et la droite entre l'origine et le point d'affixe z . Il est géométriquement défini comme suit dans une moitié du plan complexe (arc-tangente ne renvoie qu'une moitié d'arc) :

$$\phi(z) = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) [2\pi], \quad x > 0.$$

Dans l'autre région du plan :

$$\phi(z) = \arg(z) = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) [2\pi], \quad x < 0.$$

Avec deux cas pathologiques (division par zéro) :

$$x = 0 \ y > 0 \Rightarrow \phi(z) = \arg(z) = \frac{\pi}{2}, [2\pi] \quad x = 0 \ y < 0 \Rightarrow \phi(z) = \arg(z) = \frac{3\pi}{2}, [2\pi].$$

Rappelons-nous que les arguments sont tous définis à un tour près ce qui justifie la notation des modulus ($[2\pi]$) c'est assez évident de se retrouver au même endroit si l'on a tourné d'un tour sur soi-même².

². Aux vertiges près...

Remarque : Notons que la fonction `atan2(y, x)` permet d'implémenter ceci lorsqu'on code. Elle est implémentée en `Python` (Bibliothèque `numpy`) en `Matlab`, en `C` (Bibliothèque `Maths`) etc.. Cependant, en contrôle on préfère `arctan` sur les copies car ceci demeure du code.

Le module : que nous noterons ρ est en fait la distance entre le point d'affixe z et l'origine. Souvenez-vous du théorème de Pythagore et vous aurez notre chère formule qui suit :

$$\rho(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ceci est tout pour les définitions, pour les calculs des propriétés existent. Comme l'objet du cours n'est pas les mathématiques, nous laisserons le soin au lecteur de les (re)découvrir sur n'importe quel site digne de ce nom comme Wikipédia (oui même lui). En fait c'est juste des astuces, si vous revenez à la définition qui sépare les parties imaginaire y et réelle x vous trouverez ces astuces aisément.

Parties réelles et imaginaires : Pour un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ quelconque tel que $z = x + jy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}$, on note $x = \Re(z)$ sa **partie réelle** et $y = \Im(z)$ sa **partie imaginaire**. Notons que ces deux nombres sont des **réels**.

Propriété 2.1 : Conjugué d'un nombre complexe Soit $z \in \mathbb{C}$ on note z^* son **conjugué** qui vérifie :

$$\Im(z^*) = -\Im(z) \text{ et } \Re(z^*) = \Re(z),$$

par ailleurs, ceci est strictement équivalent à affirmer que z^* vérifie :

$$|z^*| = |z| \text{ et } \phi(z^*) = -\phi(z).$$



III Résolution d'EDLC d'ordre 2

III.A Définition

Une Equation Différentielle Linéaire à coefficients Constants (EDLC) d'ordre 2, est de la forme qui suit :

$$\alpha \frac{d^2 f}{dt^2} + \beta \frac{df}{dt} + \gamma f(t) = \delta, \quad (2.1)$$

où :

- f est une fonction continûment différentiable deux fois et est **notre inconnue**. Les notations $\frac{d^2 f}{dt^2}$ et $\frac{df}{dt}$ sont respectivement ses dérivées secondes et première en fonction du temps. On supposera la fonction monovariante et fonction seulement du temps.
- les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres réels et constants. On différencie δ des autres : c'est un terme excitateur provenant généralement d'une source extérieure (alimentation d'un circuit en électronique par ex.).

On ne peut pas résoudre cette équation directement, on va utiliser la **forme canonique** pour bien comprendre et des équations auxiliaires dont la méthode de résolution générale est connue et maîtrisée. Nous ne sommes pas en mathématiques mais dans des systèmes physiques.

Remarque : Pour nos applications, on va se concentrer sur des résolutions d'EDLC dans $\mathbb{R}^+$ puisque seuls les temps positifs nous importent. On rappelle que $t \in [0, \infty[= \mathbb{R}^+$.

III.B Forme canonique d'une EDLC2

On est ici en sciences physique, nous sommes face à des problèmes cinétiques. «Cinétique» signifie que l'on étudie des variables dépendantes du temps. Pour résoudre les équations différentielles de manière physiquement intuitive, on va introduire deux grandeurs dans l'équation générale 2.1.

- ω_n , aussi notée ω_0 la pulsation propre du système exprimée en rad/s. C'est une quantité positive.
- ξ le facteur d'amortissement qui n'a pas de dimension physique. Pour un **système asymptotiquement stable** ce dernier vérifie $\xi \in]0, \infty[$, nous verrons pourquoi par la suite.

On peut donc réécrire 2.1 :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\omega_0 \xi \frac{df}{dt} + \omega_0^2 f(t) = K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

a) Équation caractéristique

L'équation caractéristique d'une équation différentielle d'ordre 2 est la suivante :

$$r^2 + 2\omega_0 \xi r + \omega_0^2 = 0, \quad (2.3)$$

et on sait maintenant que suivant les valeurs des coefficients trois cas se présentent (section II.A).

On pose le discriminant de cette équation polynomiale :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\omega_0 \xi)^2 - 4 \times 1 \times \omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1),$$

on remarque que les trois cas qui suivent ne sont liés qu'à la valeur de ξ en supposant la pulsation propre positive et fixée.

b) Solution générale de l'équation homogène



Une équation homogène est l'équation 2.2 pour laquelle le terme constant à droite K est nul.

Une solution homogène f_H d'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants est de la forme suivante :

$$f_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad (2.4)$$

où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique 2.3. D'autre part A et B sont des constantes réelles à trouver avec deux points connus de la fonction f .



Exemple 2.1 : Vitesse angulaire d'un moteur On étudie la vitesse angulaire Ω d'un moteur qui démarre jusqu'à atteindre une vitesse de croisière Ω_c on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad f(t) = \Omega(t), \quad \Omega(0) = 0 \text{ et } \Omega(\infty) = \Omega_c,$$

les deux points de fonctionnements précédents peuvent être utilisés pour déterminer A et B sachant r_1 et r_2 .

c) Solution particulière

Ici, on va chercher une solution f_P de l'équation qui vérifie l'égalité avec la constante K . Une fonction constante dans $\mathbb{R}^+$ sera satisfaisante :

$$f'_P = f''_P = 0 \text{ solution} \Leftrightarrow \omega_0^2 f_P(t) = K \Leftrightarrow f_P(t) = \frac{K}{\omega_0^2},$$

en effet, nous ne traitons que des réponses indicielles dans nos exemples, c'est-à-dire des réponses à une amplitude constante.

d) Solution générale de l'équation complète

Comme une équation différentielle est linéaire le théorème de superposition s'applique et donc :

$$f(t) = f_H(t) + f_P(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + \frac{K}{\omega_0^2}.$$

III.C Régimes possibles des solutions d'une EDLC2

a) Cas $\Delta > 0 \Leftrightarrow \xi > 1$ régime apériodique :

En résolvant l'équation 2.3, dans ce cas, on trouve comme solution :

$$r_{1,2} = \frac{-2\omega_0\xi \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

ce qui donne :

$$f(t) = Ae^{-t\omega_0(\xi+\sqrt{\xi^2-1})} + Be^{-t\omega_0(\xi-\sqrt{\xi^2-1})} + \frac{K}{\omega_0^2}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.2 : Régime apériodique sans second membre K pour $K = 0$, $\omega_0 = 1$, $\xi = 1.5$, $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$.

La première condition initiale $f(0) = 1$ nous donne l'équation suivante :

$$A + B = 1 \Leftrightarrow B = 1 - A,$$

de plus $f'(0) = 0$ nous donne :

$$\begin{aligned} A(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) + (1 - A)(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow A &= \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \approx -0.1708. \end{aligned}$$

Et on en déduit B de ce fait, on peut tracer le graphe de f en fonction de la variable t sur MATLAB par exemple 2.2.

b) Cas $-4\omega_0^2 < \Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \xi < 1$ régime pseudo-périodique

En résolvant l'équation 2.3, dans ce cas, on trouve comme solution :

$$r_{1,2} = \frac{-2\omega_0\xi \pm j\sqrt{-\Delta}}{2},$$

ce qui nous fait la solution suivante :

$$f(t) = Ae^{-t\omega_0(\xi+j\sqrt{1-\xi^2})} + Be^{-t\omega_0(\xi-j\sqrt{1-\xi^2})} + \frac{K}{\omega_0^2}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Ce qui peut se réécrire de la façon suivante avec les formules d'Euler³ :

$$f(t) = [a \cos(t\omega_0\sqrt{1-\xi^2}) + b \sin(t\omega_0\sqrt{1-\xi^2})]e^{-\omega_0\xi t} + \frac{K}{\omega_0^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Les formules d'Euler sont $\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$.

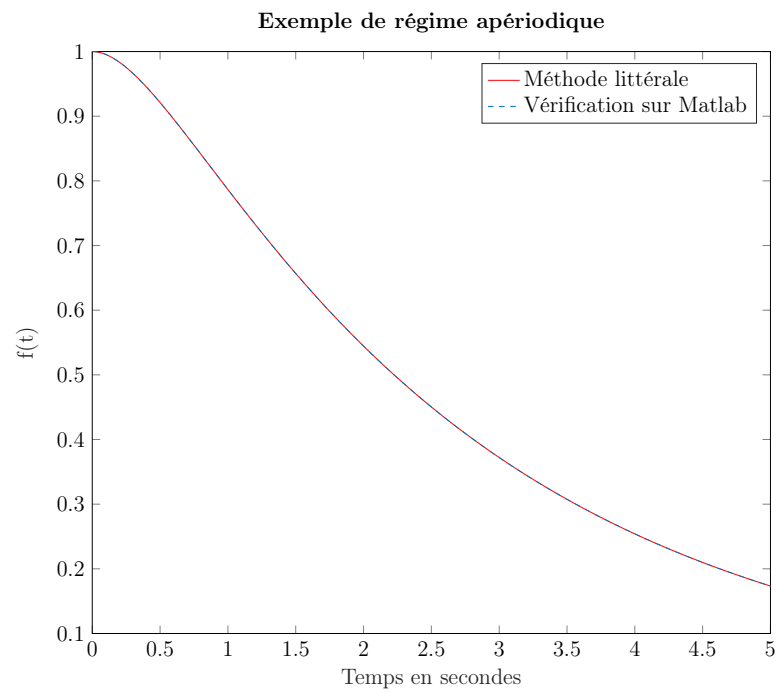


FIGURE 2.2 – Tracé d’une solution apériodique d’une EDLC2.

On a donc une enveloppe $e^{-\omega_0 \xi t}$ qui module une partie oscillatoire du signal.



Afin de nous faciliter la tâche dans les exemples suivants, on va poser :

$$\zeta = \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Exemple 2.3 : Régime pseudo-périodique : On prend $K = 1$ $\omega_0 = 1$ rad/s et $\xi = 0.2$. On a donc $\zeta \approx 0.98$. Pour une fonction $f(t)$ aux conditions initiales suivantes $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. On recherche donc a et b . On dérive l'expression générale de la solution ^a :

$$f'(t) = \exp(-\xi \omega_0 t) (-a \zeta \omega_0 \sin(t \omega_0 \zeta) + b \omega_0 \zeta \cos(t \omega_0 \zeta) - \xi \omega_0 [a \cos(t \omega_0 \zeta) + b \sin(t \omega_0 \zeta)]).$$

Cette fonction appliquée en $t = 0$ nous donne l'équation suivante :

$$f'(0) = 0 = +b \omega_0 \zeta - \xi \omega_0 a \Leftrightarrow b = +\frac{\xi}{\zeta} a,$$

on recherche a maintenant avec l'expression de f :

$$f(0) = 0 = a + \frac{K}{\omega_0^2} \Leftrightarrow a = -\frac{K}{\omega_0^2} = -1,$$

donc $b = -20.41$ et on applique la formule :

$$f(t) = \left[a \cos(t \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}) + b \sin(t \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}) \right] e^{-\omega_0 \xi t} + \frac{K}{\omega_0^2},$$

qui est visible sur la figure 2.3.

a. K étant une constante, elle disparaît dans l'expression.

c) Cas particulier $\Delta = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$ régime apériodique critique

Cette situation n'est possible qu'en théorie, elle marque la limite entre oscillations et régime apériodique, le cas est théorique puisqu'une égalité n'est jamais remplie exactement. C'est pour cela que l'on ne va pas vraiment l'étudier

L'unique racine double de l'équation caractéristique vaut dans ce cas :

$$r_1 = -\omega_0 \xi$$

Ici, la théorie des équations différentielles nous donne la forme suivante comme solution générale

$$f(t) = (A + Bt)e^{-t\omega_0} + \frac{K}{\omega_0^2}, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

on remarque que cette solution est une combinaison linéaire d'exponentielles⁴ réelles, elle est donc apériodique.

Exemple 2.4 : Régime apériodique critique : Si $K = 1$, $\omega_0 = 2$, $f(t) = 0$ et $f'(0)$. On dérive f et on obtient :

$$f'(t) = (B + A\omega_0 + B\omega_0 t)e^{-t\omega_0}.$$

Les conditions aux limites donnent :

$$f(0) = 0 = A + K/\omega_0 \Leftrightarrow A = -1/4,$$

$$f'(0) = 0 = B + A\omega_0 \Leftrightarrow B = 1/8.$$

Le résultat trouvé est tracé à la figure 2.4.

4. Et non de fonctions trigonométriques, *alias* des exponentielles complexes.

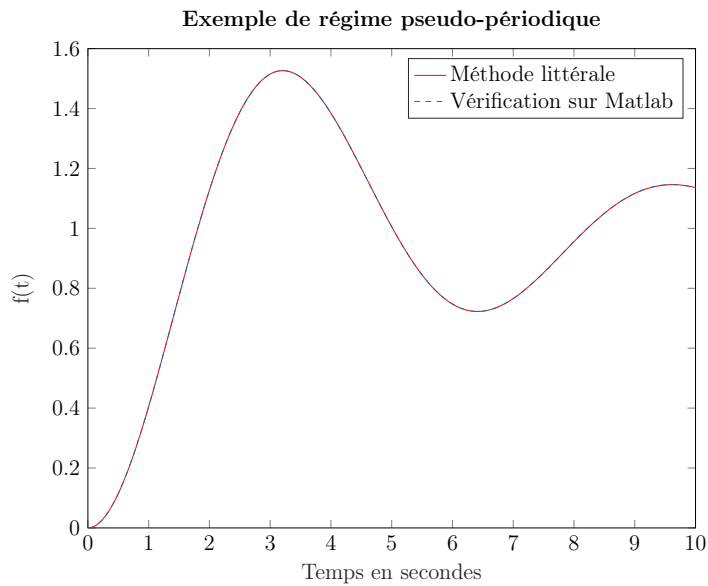


FIGURE 2.3 – Tracé d’une solution pseudo-périodique d’une EDLC2.

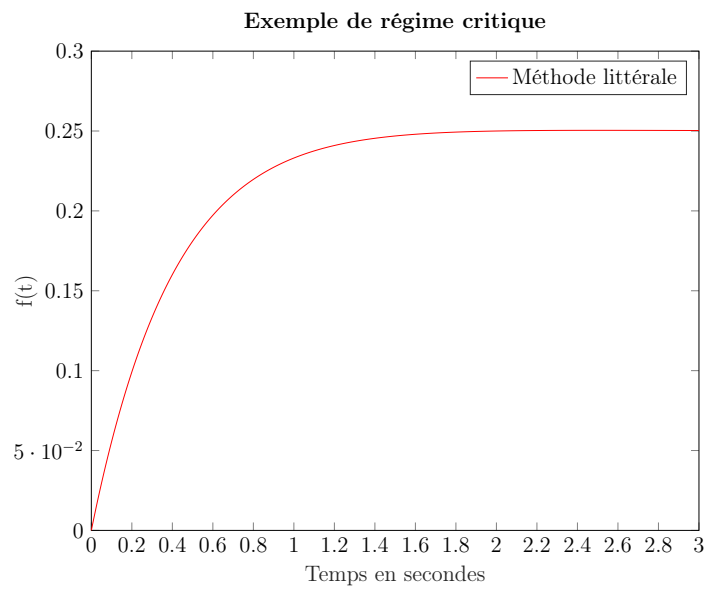


FIGURE 2.4 – Tracé d’une solution de régime critique d’une EDLC2.

d) Cas particulier $\Delta = -4\omega_0^2 \Leftrightarrow \xi = 0$ régime périodique

Cette situation n'est possible qu'en théorie puisqu'une égalité n'est jamais remplie exactement. Elle représente beaucoup pour les électroniciens : l'oscillateur harmonique idéal (sans amortissement). La condition d'oscillation étant connue sous le nom de *Condition de Barkhausen*.

Dans ce cas l'équation 2.2 se récrit :

$$f''(t) + \omega_0^2 f(t) = K,$$

avec une réécriture de l'équation caractéristique 2.3 comme suit :

$$r^2 + \omega_0^2 = 0,$$

ses racines sont des scalaires imaginaires purs et valent :

$$r_{1,2} = \pm j\omega_0.$$

La solution générale se réécrit donc comme une combinaison d'exponentielles plus une constante :

$$f(t) = f_P(t) + f_H(t) = Ae^{j\omega_0 t} + Be^{-j\omega_0 t} + \frac{K}{\omega_0^2}, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

expression qui peut se réécrire avec les formules d'Euler de la façon suivante :

$$f(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) + \frac{K}{\omega_0^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

que l'on peut enfin réorganiser avec les formules de trigonométrie comme suit :

$$f(t) = C \sin(\omega_0 t + \phi) + \frac{K}{\omega_0^2}, \quad \{C, \phi\} \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi],$$

avec ϕ une phase 2π -périodique.

Exemple 2.5 : Oscillateur harmonique On prend $\xi = 0$, $\omega_0 = 8$, $K = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. On dérive f et on obtient :

$$f'(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t) + b\omega_0 \cos(\omega_0 t),$$

et donc on obtient des conditions aux limites les égalités suivantes :

$$f(0) = 0 = a,$$

$$f'(0) = 1 = b\omega_0 \Leftrightarrow b = 1/\omega_0,$$

$$f(t) = b \sin(\omega_0 t) + K = \frac{1}{8} \sin(8t).$$

Le résultat trouvé est tracé à la figure 2.5.

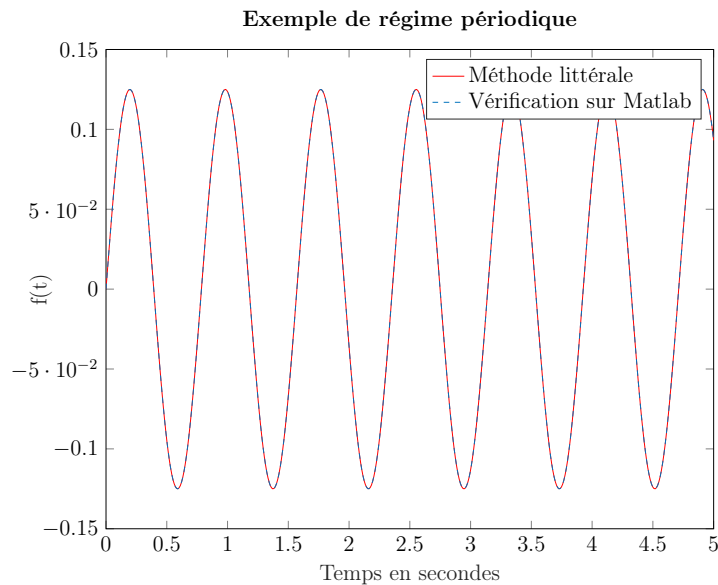


FIGURE 2.5 – Tracé d’une solution harmonique d’une EDLC2.

e) Cas instable $\xi < 0$ 

On appelle **stabilité** au sens *Bounded Input Bounded Output* (BIBO) le fait qu'un signal de sortie $s(t)$ d'un système *ne diverge pas* si *son entrée $e(t)$ est bornée*.

$$\text{Système BIBO} \Leftrightarrow (|e(t)| < \infty \Rightarrow |s(t)| < \infty, \forall t \in \mathbb{R}).$$

Nous reviendrons plus tard sur cette considération fondamentale en automatique au chapitre 4.

En reprenant l'équation caractéristique, on a :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\omega_0\xi)^2 - 4 \times 1 \times \omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1).$$

Les différents cas de figure en fonction du discriminant Δ peuvent être envisageables, or dans ces deux cas, on obtient les solutions suivantes :

$$\begin{cases} f(t) = Ae^{-t\omega_0(\xi+\sqrt{\xi^2-1})} + Be^{-t\omega_0(\xi-\sqrt{\xi^2-1})} + \frac{K}{\omega_0^2}, & A, B \in \mathbb{R}, \\ \text{ou} \\ f(t) = [a \cos(t\omega_0\sqrt{1-\xi^2}) + b \sin(t\omega_0\sqrt{1-\xi^2})]e^{-\omega_0\xi t} + \frac{K}{\omega_0^2}, & a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Or, si $-1 < \xi < 0$ on a lorsque $t \rightarrow \infty$:

$$e^{-t\omega_0(\xi+\sqrt{\xi^2-1})} \rightarrow \infty,$$

et si $\xi < -1$ on a lorsque $t \rightarrow \infty$:

$$e^{-\omega_0\xi t} \rightarrow \infty,$$

ce qui donne dans tous les cas $|f(\infty)| \rightarrow \infty$, ce qui est la définition même d'un **système instable**.



Propriété 2.2 : Cas de l'oscillateur et stabilité asymptotique L'oscillateur est un cas particulier, il est stable au sens BIBO (il oscille sans diverger) mais n'est pas stable au sens **asymptotique**. La **Stabilité Asymptotique (SA)** n'est assurée que si un système converge vers une valeur finie :

$$\text{Système SA} \Leftrightarrow (|e(t)| < \infty \Rightarrow |s(\infty)| = k, k \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}).$$



Propriété 2.3 : Critère de stabilité La stabilité (asymptotique) est assurée lorsque les racines du polynôme caractéristique ont des parties réelles **strictement négatives**.

IV Résolution d'EDLC d'ordre 1

IV.A Définition

On appelle **Équation Différentielle Linéaire à coefficients Constants d'ordre 1 (EDLC1)** une équation différentielle de la forme :

$$\frac{df(t)}{dt} + \alpha f(t) = C, \quad \alpha, C \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

L'équation caractéristique vaut :

$$r + \alpha = 0,$$

l'équation caractéristique ne possédant qu'une seule solution, force est de constater qu'aucune disjonction de cas n'est explicitée ici.

IV.B Forme canonique

Comme on étudie les équations différentielles avec $t > 0$ dans cet ouvrage et que le coefficient α est homogène à l'inverse d'un temps (positif donc), on va réécrire cette dernière ainsi :

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = C, \quad \{\tau, C\} \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

on introduit τ qui est le temps caractéristique de l'équation différentielle.

a) Solution générale de l'équation

La solution s'écrit ainsi :

$$f_H(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad A \in \mathbb{R}.$$

b) Solution particulière

On cherche une solution constante (souvent pour $t \rightarrow \infty$, où le système n'évolue plus s'il est stable, $\dot{f} = 0$) et on obtient :

$$f_P(t) = C\tau.$$

c) Solution générale

Cette dernière s'exprime de la façon suivante :

$$f(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + C\tau. \quad (2.7)$$

Remarque : L'équation caractéristique n'admet qu'une seule solution réelle.

Remarque : La solution générale $f(t)$ trouvée pour l'EDLC1 ne diverge pas (*ie* le système est stable) si et seulement si $\tau > 0$. On retrouve le critère de stabilité ici.



Exemple 2.6 : Équation différentielle d'ordre 1 avec second membre On suppose $\tau = 5$ et $C = -8$ on sait également que $f(0) = 42$.

En premier lieu, on cherche A :

$$f(0) = 42 = A - 8 \times 5 \Leftrightarrow A = 82,$$

La solution est tracée sur la figure 2.6.

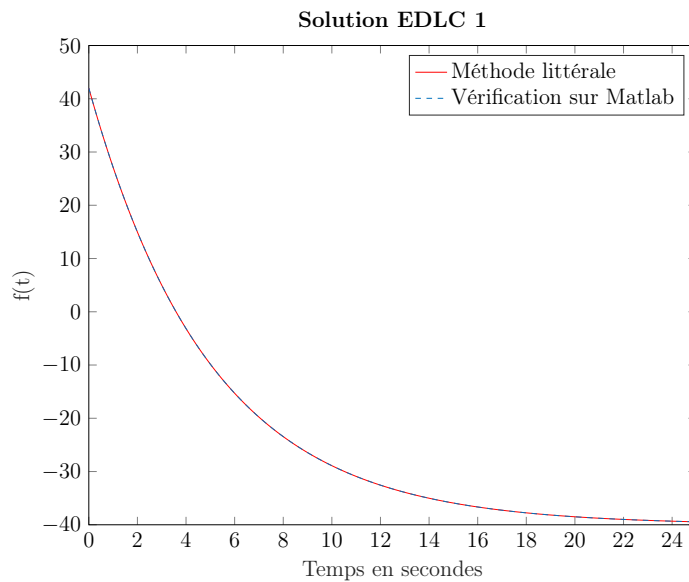


FIGURE 2.6 – Solution d’une équation différentielle d’ordre 1.

Notations mathématiques utilisées en algèbre ★

Comme son nom l'indique cette partie n'est pas un cours mais quelques rappels de notations élémentaires.

I Opérateurs vectoriels

Les vecteurs dans cet ouvrage sont notés en **gras** et en minuscules. On suppose que les vecteurs sont ordonnés en colonne et leurs coefficients notés comme suit :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

on note par ailleurs le **vecteur transposé** de $\mathbf{v}$ ainsi : $\mathbf{v}^\top$.

a) Norme euclidienne

On note la **norme euclidienne** des vecteurs réels comme suit :

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

b) Produit scalaire euclidien

Le produit scalaire de deux vecteurs quelconques $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est noté par l'opérateur « $\cdot$ ». On note donc :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Il est utile dans les projections sur certains axes.

c) Produit vectoriel

Le produit vectoriel est entendu comme étant un produit de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$. Soit deux vecteurs dudit espace $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ on notera ce produit avec l'opérateur « $\times$ » comme suit :

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}.$$

Il est utile dans le calcul des moments et des couples.

II Opérateurs matriciels

II.A Matrices

Toutes les matrices évoquées dans cet ouvrage sont à coefficients réels, écrites en **gras** et en lettres majuscules. Pour tout n et m entiers strictement positifs, on définira $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathbb{R}$ telles qu'elles possèdent n lignes et m colonnes. En particulier, on utilisera l'abréviation $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour désigner une matrice carrée, *i.e.* lorsque $m = n$. L'écriture pour les coefficients d'une matrice $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ choisie est la suivante :

$$\mathbf{M} = (M_{ij})_{i \leq n, j \leq m}, \text{ avec } i, j \in (\mathbb{N}^*)^2.$$

La matrice transposée de $\mathbf{M}$ est :

$$\mathbf{M}^\top = (M_{ji})_{i \leq n, j \leq m}, \text{ avec } i, j \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbf{M}^\top \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

a) Matrices usuelles

$\forall i, j \in [1, n]^2$ la matrice **identité** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathbf{I}_n$ et vérifie $I_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $I_{i,j} = 0$ sinon. La matrice $\mathbf{0}_{n,m}$ est la matrice nulle $0_{i,j} = 0$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}$. La matrice $\mathbf{M}$ notée $\mathbf{M} = \text{diag}(M_{11}, \dots, M_{ii}, \dots, M_{nn})$ représente une **matrice diagonale** $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant pour seuls coefficients non-nuls les scalaires M_{ii} sur sa diagonale ($i = j$).

II.B Trace et norme

On appelle **la trace** d'une matrice carrée la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\forall \mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^n m_{ii}.$$

Par ailleurs, on définira **la norme de Frobenius** d'une matrice carrée comme suit :

$$\forall \mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\mathbf{M}\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)}.$$

II.C Produit matriciel usuel et produit de Kronecker

Pour tout m, n et p entiers naturels strictement positifs, le **produit** de deux matrices $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ n'est possible que si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, il vaut :

$$P_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j}, \quad \forall i, j \in [1, m] \times [1, p]$$

Le produit de **Kronecker**, symbolisé par l'opérateur $\otimes$ est le produit par bloc défini comme suit :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & \cdots & A_{1,n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}\mathbf{B} & \cdots & A_{m,n}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

II.D Déterminant d'une matrice

Pour toute matrice carrée $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut définir son **déterminant** comme étant la quantité suivante :

$$\det(\mathbf{M}) = |\mathbf{M}| = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i},$$

avec $\mathcal{P}$ est l'**ensemble des permutations** des entiers allant de 1 à n . La quantité ϵ est la **signature** de telles permutations qui est égale à 1 si la permutation est paire et -1 sinon.

De façon pratique, le déterminant se calcule de façon récursive, en sachant que le déterminant d'une matrice générique carrée de dimension deux vaut :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

On peut développer un déterminant pour le réduire en une somme de blocs 2×2 .

Méthode : Soit une matrice carrée $\mathbf{M}$ de dimension n dont on souhaite calculer le déterminant.

On choisit une ligne i (ou une colonne j) de la matrice, on initialise $\Delta = 0$.

1. Pour chacun des coefficients M_{ij} de la ligne i ;
2. On crée un sous-déterminant $|\mathbf{S}_j|$ (respectivement $|\mathbf{S}_i|$) de rang $n - 1$ en supprimant la ligne i et la colonne j dudit coefficient ;
3. On incrémente $\Delta = \Delta + (-1)^{i+j} M_{ij} |\mathbf{S}_i|$;
4. On passe au coefficient suivant $j + 1$ (resp. $i + 1$) jusqu'à n .

Une fois ceci fait, on peut répéter le processus sur les déterminants $|\mathbf{S}_j|$ et leurs successeurs jusqu'à ce qu'ils soient de rang deux.

Exemple de développement : Soit une matrice carrée quelconque :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{12} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix}$$

on peut développer le déterminant de cette dernière par la première colonne :

$$\begin{aligned}
 \det M &= \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= +M_{11} \begin{vmatrix} M_{12} & \dots & M_{2n} \\ M_{32} & \dots & M_{3n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{vmatrix} - M_{21} \begin{vmatrix} M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{32} & \dots & M_{3n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{vmatrix} \\
 &\quad + M_{31} \begin{vmatrix} M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{22} & \dots & M_{2n} \\ M_{42} & \dots & M_{4n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} M_{n1} \begin{vmatrix} M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ M_{(n-1)2} & \dots & M_{(n-1)n} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

on réitère le procédé sur les sous-déterminants jusqu'à obtenir des déterminants de dimension deux et donc calculables immédiatement.

Remarque : Le déterminant est invariant par transposée :

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top,$$

donc le développement selon les lignes est identique dans son fonctionnement.

III Éléments d'algèbre

III.A Inverse Matriciel

a) Définition

Soit $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisfait :

$$\mathbf{MA} = \mathbf{I}_n.$$

alors $\mathbf{A}$ est l'inverse de $\mathbf{M}$. On la notera $\mathbf{M}^{-1}$.



Propriété 3.1 : Existence et unicité Une matrice carrée $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **inversible** si et seulement si $\det \mathbf{M} \neq 0$, de plus cet inverse est unique.

b) Calcul d'inverse

On peut utiliser la formule de la comatrice pour effectuer cette opération. Pour toute matrice $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ carrée et inversible on a :

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} [\text{com} \mathbf{M}]^{\top},$$

avec $\text{com} \mathbf{M}$ la comatrice de $\mathbf{M}$ dont les coefficients valent :

$$\text{com} \mathbf{M}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{M}_{ij}),$$

où $\mathbf{M}_{ij}$ est la matrice carrée de taille $n - 1$ déduite de $\mathbf{M}$ en supprimant la colonne j et la ligne i .



Exemple 3.1 : Calcul d'inverse Calculer l'inverse de :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Premièrement on développe le déterminant par rapport à la dernière ligne (facile puisqu'un seul coefficient est non-nul) :

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{3+1} \times 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

il est non-nul, la matrice admet un inverse.

La comatrice vaut :

$$\text{com}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +2 & -1 \\ 0 & -1 & +2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

L'inverse vaut donc, en transposant le résultat précédent :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & +2 & -1 \end{bmatrix}.$$

III.B Changement de Base

Soit une matrice carrée $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on peut l'exprimer dans autant de systèmes de coordonnées que l'on veut. Idem pour un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

La seule condition à respecter est qu'il existe une matrice de passage $\mathbf{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}$ du système de coordonnées de départ $\mathcal{D}$ à un système de coordonnées d'arrivée $\mathcal{A}$, cette matrice **doit satisfaire les propriétés suivantes** :

Dimension : $\dim(\mathbf{M}) = \dim(\mathbf{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}})$;

Réciprocité de la transformation : $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}}$ **doit exister**, il est l'inverse de la matrice de transformation noté $[\mathbf{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}]^{-1}$. Cet inverse existe **si et seulement si** $\det[\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}}] \neq 0$.

On peut donc exprimer $\mathbf{M}$ et $\mathbf{v}$ dans les systèmes de coordonnées suivants :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{A}} = \mathbf{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}} \mathbf{M}_{\mathcal{D}} [\mathbf{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}]^{-1}, \quad \mathbf{M}_{\mathcal{A}} = \mathbf{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}} \mathbf{M}_{\mathcal{D}},$$

et également revenir en arrière¹ :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}} = \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}} \mathbf{M}_{\mathcal{A}} [\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}}]^{-1} = [\mathbf{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}]^{-1} \mathbf{M}_{\mathcal{A}} \mathbf{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}, \quad \mathbf{M}_{\mathcal{A}} = \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}} \mathbf{M}_{\mathcal{A}} = [\mathbf{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}]^{-1} \mathbf{M}_{\mathcal{A}}.$$

III.C Algèbre spectrale

a) Spectre d'une matrice

Pour toute matrice carrée $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(R)$, le **spectre** de cette matrice est l'**ensemble des valeurs propres** λ_i avec $i \in [1, n]$ de cette dernière. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique χ compagnon de la matrice qui est défini comme suit :

$$\chi(x) = \det[\mathbf{M} - \mathbf{I}_n x] = \prod_i (x - \lambda_i)^{\mu_i}.$$

Par ailleurs, les **vecteurs propres** de la matrice associés aux valeurs propres $\mathbf{v}_i$ sont les solutions non triviales ($\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$) de :

$$\mathbf{M} \mathbf{v}_i - \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Dépendant de la **multiplicité** μ_i des valeurs propres, plusieurs vecteurs propres $\mathbf{v}_i^k$, $k \in [1, \mu_i]$ peuvent être associés à la même valeur propre. L'union des vecteurs $\mathbf{v}_i^k$ satisfaisant l'équation ci-dessus pour un i donné forme un **sous-espace propre**. Ce sous-espace est doté d'une dimension d_i qui $1 \leq d_i \leq \mu_i$.

b) Diagonalisation

Si $d_i = \mu_i$ (toujours le cas si $\mu_i = 1$) alors on dira que le sous-espace est de dimension pleine. Si tous les sous-espaces de la matrice sont de dimension pleine alors on peut **diagonaliser** la matrice $\mathbf{M}$.

Soit la matrice carrée suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_i & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

1. **Note** : l'application linéaire associée à $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{D}}$ est une transformation réversible appelée isomorphisme.

$\mathbf{M}$ est diagonalisable si tous ses sous-espaces propres sont de dimension pleine, c'est-à-dire que $\sum_i d_i = n$ ce qui est vérifié si $\det \mathbf{P} \neq 0$. Alors $\mathbf{P}$ est inversible et on peut **diagonaliser** $\mathbf{M}$ par changement de base entre la base de départ et la base des vecteurs propres :

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}, \text{ avec } \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n).$$

Cette formulation est extrêmement utile pour la résolution de systèmes matriciels : la "base propre" permet de séparer les variables du problème par transformation (la matrice $\mathbf{D}$ est diagonale).

c) Lien entre déterminant, trace et spectre

La trace d'une matrice est indépendante de la base considérée², en particulier s'il existe une matrice $\mathbf{P}$ inversible on a :

$$\text{tr}(\mathbf{M}) = \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

notons également que la trace est **toujours** la somme des valeurs propres d'une matrice.

Le déterminant d'un inverse est l'inverse du déterminant :

$$\det(\mathbf{P}^{-1}) = [\det(\mathbf{P})]^{-1} = \eta^{-1}, \text{ avec } \det(\mathbf{P}) = \eta \neq 0.$$

le déterminant est également multiplicatif (propriété de morphisme), supposons deux matrices $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}),$$

également si tel est le cas, le produit des valeurs propres est **toujours** égal au déterminant indépendamment de la base :

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}) = \det(\mathbf{P}) \det(\mathbf{D}) \det(\mathbf{P}^{-1}) = \eta \det(\mathbf{D}) \frac{1}{\eta} = \det(\mathbf{D}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

2. Utilisant l'identité de permutation circulaire suivante : $\text{tr}(\mathbf{ABC}) = \text{tr}(\mathbf{BCA})$.

IV Notation pour l'analyse multivariable

IV.A Dérivées

a) Dérivée vectorielle

Soit une fonction vectorielle $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonction d'un vecteur $\mathbf{x}$ de dimension n :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

On peut définir la dérivée vectorielle de $\mathbf{f}$ comme étant sa **matrice jacobienne**, et définie comme suit :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = (j_{ik})_{i \leq m, k \leq n}, \text{ où } j_{i,k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \text{ avec } i, k \in \mathbb{N}.$$

b) Dérivée temporelle

La notation abrégée $\dot{\mathbf{a}}$ pour une fonction généraliste

$$\mathbf{a} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ t \rightarrow \mathbf{a}(t), \end{cases}$$

équivalent à la notation rigoureuse $\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}$. C'est-à-dire :

$$\dot{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dots \\ \dot{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{da_1}{dt} \\ \dots \\ \frac{da_n}{dt} \end{bmatrix}.$$

IV.B Généralisation des EDLC1

a) Exponentielle d'une matrice

L'**exponentielle** d'une matrice carrée $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie comme ceci :

$$\exp(\mathbf{M}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^i}{i!}.$$

Par ailleurs, on remarquera que si $\mathbf{M}$ est **nilpotente**³, alors la série possède un nombre fini de termes.

b) Solution d'un système différentiel à coefficients constants

Soit un système différentiel d'ordre un en temps continu défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

On appellera le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ **vecteur d'état** et la matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **matrice de transition**. La fonction $\mathbf{x}(t)$ est la solution du précédent système [Meiss, 2007] et qui s'exprimera ainsi (connaissant une condition initiale $\mathbf{x}(0)$) :

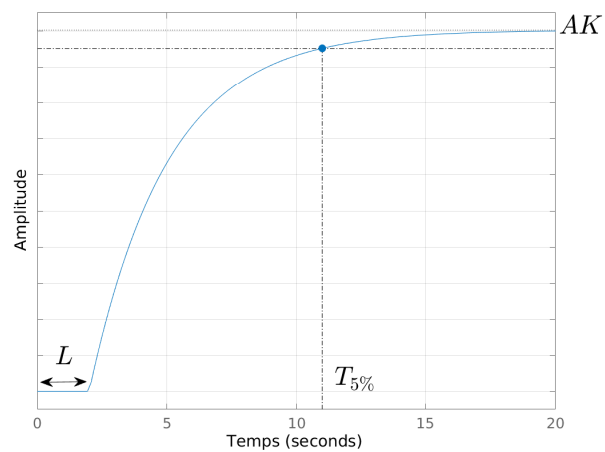
$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0).$$

C'est la généralisation de la résolution d'EDLC d'ordre 1 vue au chapitre 2 (section 2) de ces notes.

3. Ceci signifie qu'il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{M}^i = \mathbf{0}, \forall i \in \mathbb{N}, i > l$.

Partie II

Analyse des systèmes asservis



Plan de Laplace

Nous allons aborder dans ce chapitre un **outil d'analyse** extrêmement puissant pour les **contrôleurs** : la transformée de Laplace.

La transformée de Laplace est un outil mis au point par *Pierre-Simon de Laplace* (1749-1827), mathématicien français. Cette transformée est extrêmement utile en analyse et permet d'effectuer des calculs dans le plan de Laplace et non seulement sur l'axe des réels, permettant la résolution de problèmes plus aisée.

En théorie des équations différentielles, on utilise cette transformée lorsqu'elles sont linéaires et que les résultats usuels sont tabulés depuis près de deux siècles. En outre, elle permet d'exprimer les **EDLC** sous forme de polynômes complexes, ce qui transforme une relation différentielle en une simple relation algébrique.

I Transformée de Laplace

Cette section traite essentiellement de l'outil et de ses propriétés fondamentales, ce n'est pas un cours de mathématiques rigoureux mais seulement un aperçu utilitaire avant de pouvoir effectivement concevoir des contrôleurs grâce à la transformée.

I.A Définitions fondamentales

a) Causalité



Une fonction f **causale** est définie de la façon suivante :

$$f \text{ causale} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad t < 0, \quad f(t) = 0.$$

En pratique, nous nous limiterons à l'étude de ces fonctions puisque nous considérons que le temps a une origine. Physiquement, cela signifie que la fonction f n'atteint des valeurs qui ne dépendent que de son passé.

Remarque : On étudie la fonction f uniquement sur $\mathbb{R}^+$.

b) Transformée de Laplace d'une fonction causale

Mathématiquement, une transformée de Laplace d'une fonction causale¹ est définie de la façon suivante :

$$\mathcal{L}(f(t)) := F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad (4.1)$$

où :

- ♦ s est une **variable complexe** dite **variable de Laplace**. On décompose s de la façon suivante :

$$s = \sigma + j\omega, \quad \{\sigma, \omega\} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad j \in \mathbb{C}, \quad j^2 = -1;$$

1. Nous prendrons pour hypothèse que les fonctions étudiées sont causales dans le reste de ces notes.

- ♦ f est une **fonction temporelle** causale ;
- ♦ C'est une opération qui s'applique sur toute une fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ afin de générer une autre fonction, appelée transformée $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

L'opération inverse est appelée **transformation inverse de Laplace** et associe :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)),$$

il n'existe pas de formule générale donnant le résultat précédent.

I.B Quelques propriétés

Remarque : Afin de ne pas alourdir le document, je ne démontre pas ces dernières ici. S'il y a des demandes, je le ferai dans une annexe lors d'une édition prochaine.



On note E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

$$f \in E \Leftrightarrow f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

a) Propriétés utiles au calcul d'EDLC



Propriété 4.1 : Linéarité Ceci vient de la propriété de linéarité de l'intégrale :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad f, g \in E, \quad \mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha F(s) + \beta G(s),$$

cette propriété élémentaire est (très) utile pour les calculs de transformée.

Démonstration. Par linéarité de l'intégrale et pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(s)) = \int_{t=0}^{\infty} [\alpha f(t)e^{-st} + \beta g(t)e^{-st}] dt = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

□



Propriété 4.2 : Dérivation et intégration Pour $f \in E$, dérivable et intégrable on a :

★ **Dérivation :**

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df}{dt}(t) \right\} = sF(s) - f(0^-).$$

★ **Intégration :**

$$\mathcal{L} \left\{ \int f(t) dt \right\} = \frac{F(s)}{s} - \frac{f(0^-)}{s}.$$

Démonstration.

Dérivation : Nous faisons la supposition que $\Re\{s\} < 0$

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{\infty} \frac{d}{dt} [f(t)e^{-st}] dt &= \int_{t=0}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt - \int_{t=0}^{\infty} s f(t) e^{-st} dt \\ [f(\sigma)e^{-\sigma s}]_{\sigma=0}^{\infty} &= \mathcal{L} \left(\frac{df}{dt} \right) - s \mathcal{L}(F) \end{aligned}$$

nécessairement comme la quantité à gauche converge grâce à notre supposition, alors :

$$[f(\sigma)e^{-\sigma s}]_{\sigma=0}^{\infty} = -f(0^+) = \mathcal{L} \left(\frac{df}{dt} \right) - s \mathcal{L}(F)$$

la preuve suit en réarrangeant les termes.

Intégration : En posant $\frac{df}{dt} = g$ et en reprenant l'équation précédente, on a :

$$\frac{-\int g(0^+) dt}{s} = \frac{\mathcal{L}(g)}{s} - \mathcal{L} \left(\int g dt \right) \Rightarrow \frac{\mathcal{L}(g)}{s} = \frac{\mathcal{L}(g)}{s} - \frac{g(0^+)}{s}.$$

□

Propriété 4.3 : Cas particulier des conditions de Heaviside

- Les **conditions de Heaviside** sont définies par des valeurs initiales en 0^- nulles pour toutes les variables du système.
- En particulier on a :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df}{dt}(t) \right\} = sF(s) \text{ et } \mathcal{L} \left\{ \int f(t)dt \right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

- Bien conscients que ces conditions ne sont pas toujours respectées en pratique, nous essaierons toujours de les satisfaire le long de cet ouvrage.

Ces propriétés sont de loin les plus utiles dans Laplace : elle transforment des opérations différentielles en simples opérations algébriques. C'est donc dans notre intérêt pour la résolution des EDLC.

Remarque : Ainsi, **Intégrer** revient à **diviser** par s .

Tandis que dériver revient à multiplier par s .

b) Propriétés utiles pour la transformation de Laplace

Soit f une fonction causale intégrable sur $\mathbb{R}^+$ on notera :

$$\mathcal{L}(f(t)) := F(s),$$

Propriété 4.4 : Retard Soit un signal que l'on retarde d'un temps $\tau \in \mathbb{R}^+$, sa transformée de Laplace vérifie l'égalité suivante :

$$f_{\text{retard}}(t) := f(t - \tau) \Leftrightarrow F_{\text{retard}}(s) = F(s)e^{-\tau s}.$$

Démonstration. Par changement de variable $\lambda = t - \tau$, $d\lambda = dt$:

$$\mathcal{L}(f(t - \tau)) = \int_{t=0}^{\infty} f(\lambda)e^{-(\lambda+\tau)s} d\lambda = e^{-\tau s} \int_{t=0}^{\infty} f(\lambda)e^{-\lambda s} d\lambda = e^{-\tau s} \mathcal{L}(f(t)).$$

□



Propriété 4.5 : Amortissement Soit $\omega \in \mathbb{R}^+$ la transformée de Laplace vérifie la propriété suivante :

$$\mathcal{L}(f(t)e^{-\omega s}) = F(s + \omega),$$

d'où la conséquence suivante : si on augmente la partie réelle de la variable de Laplace, alors la fonction temporelle associée verra son amortissement augmenter.

Démonstration. Par simple multiplication :

$$\mathcal{L}(f(t)e^{-\omega s}) = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-\omega s}e^{-st}dt = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-(\omega+s)t}dt = F(s + \omega)$$

□



Propriété 4.6 : Facteur d'échelle Soit $a \in \mathbb{R}^+$ on a la relation suivante vérifiée :

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Démonstration. On supposera $a > 0$, on posera le changement de variable suivant $\lambda = at$, $t = \lambda/a$ et $dt = d\lambda/a$:

$$\mathcal{L}(f(at)) = \int f(at)e^{-ts}dt = \int f(\lambda)e^{-\frac{\lambda s}{a}}\frac{d\lambda}{a} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

□

c) Convolution

Il s'agit d'un **opérateur linéaire** assez fondamental dans l'étude des systèmes linéaires, nous verrons la notion de fonction de transfert plus tard. On note cet opérateur $\star$. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit le produit de convolution comme suit :

$$f(t) \star g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

La convolution est **commutative, associative, distributive et linéaire** ce qui en fait une opération puissante pour les calculs en traitement du signal notamment. Toutefois, nous ne l'utiliserons que rarement par la suite.

Propriété 4.7 : Effet de la convolution sur la transformée de Laplace

On note la propriété suivante :

$$F(s)G(s) = f(t) \star g(t),$$

et sa réciproque :

$$f(t)g(t) = F(s) \star G(s).$$

Ce qui implique que **la multiplication de deux signaux dans le domaine temporel n'équivaut pas à une multiplication dans le domaine de Laplace** et réciproquement.



Démonstration. Laissée au lecteur. Cela est un bon exercice qui permet de se convaincre une bonne fois pour toutes que la multiplication temporelle n'est pas équivalente en général à la multiplication dans le domaine de Laplace. $\square$

d) Théorèmes asymptotiques

Le théorème qui suit est très utile dans le calcul de la précision des systèmes asservis.

Théorème 1 (De la valeur finale). *Soit $y(t)$ un signal temporel intégrable (et convergent) et $Y(s)$ sa transformée de Laplace. Ce dernier respecte l'égalité aux limites suivante :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s).$$

Démonstration. La preuve, un peu longue, est donnée à la fin du chapitre. $\square$

Un autre théorème, moins employé, existe aussi pour la valeur initiale des signaux.

Théorème 2 (De la valeur initiale). *Soit $y(t)$ un signal temporel intégrable et $Y(s)$ sa transformée de Laplace. Ce dernier respecte l'égalité aux limites suivante :*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s).$$

Démonstration. Laissée au lecteur en s'inspirant de la précédente. □

I.C Distribution de Dirac et fonction échelon

Ces notations seront employées tout le long de l'ouvrage.

Distribution de Dirac : Ce n'est **pas une fonction** à proprement parler car sa dérivée n'existe pas mais une **distribution** [Wikipédia, 2019]. On peut la définir comme étant la distribution vérifiant cette propriété :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f(t) \star \delta_a(t) = f(a).$$

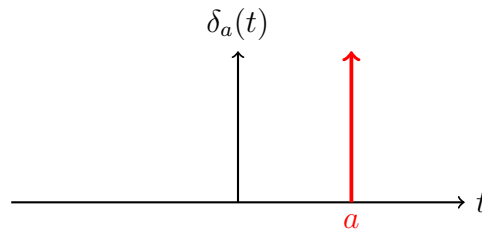


FIGURE 4.1 – Représentation de la fonction de Dirac.

Généralement, on considère le cas où $a = 0$ et on notera $\delta(t) := \delta_0(t)$. En physique, elle peut être vue comme suit : une impulsion de puissance infinie sur 0 et de puissance nulle sinon.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{si } t = 0 \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

la distribution vérifie de plus la propriété suivante :

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Fonction échelon unitaire : Aussi appelée fonction existence ou encore fonction d'Heaviside elle est définie comme suit :

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

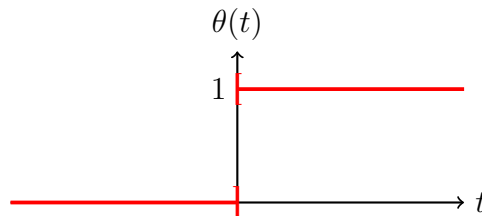
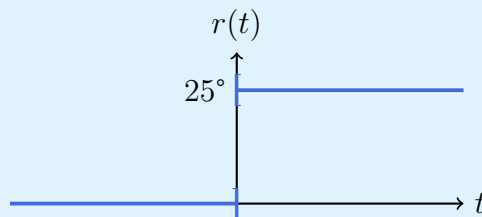


FIGURE 4.2 – Représentation de la fonction d'Heaviside.

Cette fonction représente en somme la **causalité** car elle a la propriété d'annuler tout produit de fonctions sur $\mathbb{R}^-$. Elle nous sera très utile en automatique pour modéliser une consigne ou une perturbation constante arrivant à un moment donné dans une entrée du système.

Exemple 4.1 : Utilisation Supposons un système de chauffage, à $t = 0$ on souhaite que la température demeure à 25°C . Le signal de référence, aussi appelé de consigne, dans le système qui vaudra donc :

$$r(t) = \theta(t) \times 25.$$



I.D Quelques transformées usuelles

TABLE 4.1 – Table des transformées usuelles de Laplace

Fonction temporelle causale	Transformée de Laplace
$\delta(t)$	1
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$t\theta(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n\theta(t), \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}\theta(t), \quad a \in \mathbb{R}^+$	$\frac{1}{s+a}$
$(1 - e^{-at})\theta(t), \quad a \in \mathbb{R}^+$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\sin(\omega_0 t)\theta(t), \quad \omega_0 \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)\theta(t), \quad \omega_0 \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$

Le tableau 4.1 [Kilidjian, 2015, Malhamé, 2016, Dorf and Bishop, 2010] résume les transformées usuelles de Laplace que nous aurons besoin dans la suite de ces notes de cours. Les calculs de ces dernières suivent dans la même section.

Calcul de $\mathcal{L}(\delta)$:

$$\mathcal{L}(\delta) = \int_{t=0}^{\infty} \delta(t) \exp(-st) dt = \exp(0) = 1.$$

Par propriété fondamentale de la fonction delta de Dirac centrée sur zéro. $\square$

Calcul de la famille $F_n(s) = \mathcal{L}(f_n(t)) = \mathcal{L}(t^n\theta(t))$ pour $n \in \mathbb{N}$: Nous démontrons par récurrence que la proposition $P_n = \{F_n(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\}$ se vérifie pour tout n entier.

Initialisation pour $n = 0$, montrons que P_0 est vraie :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_0(t)) &= \mathcal{L}(\theta(t)) = \int_{t=0}^{\infty} \theta(t) \exp(-st) dt = \int_{t=0}^{\infty} \exp(-st) dt \\ &= -\frac{1}{s} [\exp(-st)]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s} = \frac{0!}{s^{0+1}}. \end{aligned}$$

Récurrence supposons que P_n soit vraie, montrons que P_{n+1} l'est aussi,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f_{n+1}(t)) &= \mathcal{L}(t^{n+1}\theta(t)) = \int_{t=0}^{\infty} t^{n+1}\theta(t) \exp(-st) dt \\
 &= \int_{t=0}^{\infty} t^{n+1} \exp(-st) dt \quad (\text{a}) \\
 &= \int_{t=0}^{\infty} (n+1) \frac{t^n}{s} \exp(-st) dt - \underbrace{\left[\frac{1}{s} t^{n+1} \right]_{t=0}}_{=0} \quad (\text{b}) \\
 &= \frac{n+1}{s} \int_{t=0}^{\infty} (n+1) \frac{t^n}{s} \exp(-st) dt \quad (\text{c}) \\
 &= \frac{n+1}{s} \mathcal{L}(f_n(t)) = \frac{n+1}{s} \frac{n!}{s^{n+1}} \\
 &= \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} = F_{n+1}(s). \quad \mathbf{Fini!}
 \end{aligned}$$

Par le principe du raisonnement par récurrence, comme P_0 est vraie et que P_n vraie implique P_{n+1} vraie, alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{L}(t^n \theta(t)) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Points de la démo :

- (a) La fonction existence θ vaut 1 sur tout $[0, \infty]$.
- (b) On utilise une intégration par partie $\int_a^b uv' = \int_a^b uv' - [uv]_a^b$, on remarque que $\lim uv \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow \infty$.
- (c) On sait tous que $\int \exp(at) = \frac{1}{a} \exp(at)$.

□

Calcul de $\mathcal{L}(\exp(-at)\theta(t))$: En réutilisant les propriétés précédemment vues le calcul direct de cette intégrale nous donne :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\exp(-at)\theta(t)) &= \int_{t=0}^{\infty} \exp(-at)\theta(t) \exp(-st) dt \\
 &= \int_{t=0}^{\infty} \exp(-at) \exp(-st) dt = \int_{t=0}^{\infty} \exp(-(a+s)t) dt \\
 &= \frac{-1}{s+a} [\exp(-at)]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s+a}.
 \end{aligned}$$

□



Nous ne donnons pas la démonstration pour $F(s) = \mathcal{L}((1 - e^{-at})\theta(t))$, nos lecteurs se rendront compte que $F(s) = -\mathcal{L}(e^{-at}\theta(t)) + \mathcal{L}(\theta(t))$ par linéarité de la transformation de Laplace, le reste ce sont des fractions !

Calcul de $\mathcal{L}(\sin(\omega t)\theta(t))$: Rappelons-nous que $\sin(\theta) = \frac{1}{2j}[\exp(j\theta) - \exp(-j\theta)]$ résultat de la formule d'Euler et de la transformée de Laplace d'une exponentielle afin de mener à bien cette démonstration. Sachant cette propriété, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin(\omega t)\theta(t)) &= \int_{t=0}^{\infty} \sin(\omega t) \exp(-st) dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2j} [\exp(j\omega t) - \exp(-j\omega t)] \exp(-st) dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_{t=0}^{\infty} e^{[j\omega - s]t} dt - \frac{1}{2j} \int_{t=0}^{\infty} e^{[-j\omega - s]t} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{j\omega - s} + \frac{1}{j\omega + s} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

□

Calcul de $\mathcal{L}(\cos(\omega t)\theta(t))$: Rappelons-nous que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}[\exp(j\theta) + \exp(-j\theta)]$ résultat de la formule d'Euler et de la transformée de Laplace d'une exponentielle afin de mener à bien cette démonstration. Sachant cette propriété, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos(\omega t)\theta(t)) &= \int_{t=0}^{\infty} \cos(\omega t) \exp(-st) dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2} [\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)] \exp(-st) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\infty} e^{[j\omega - s]t} dt + \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\infty} e^{[-j\omega - s]t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

□

II Fonctions de transfert

Une fonction de transfert est une forme de **modélisation d'un système**. Il s'agit d'une quantité calculable qui peut déterminer les sorties d'un système en fonction de ses entrées et leur associer une dynamique régie par des **EDLC**. Dans notre cas, nous nous limiterons au cas monovisible dit **SISO**, linéaire et à coefficients constants, en particulier indépendants du temps (système autonome).

II.A Expressions à partir d'équations différentielles

a) Transformée de Laplace d'une EDLC

Comme vu précédemment à l'équation 1.1, un système linéaire, monovisible et à coefficients constants peut être modélisable par une équation différentielle du type :

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^M \alpha_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \kappa, \quad (N, M) \in \mathbb{N}^2, \quad \kappa \in \mathbb{R} \quad N > M. \quad (4.2)$$

On se place dans les **conditions d'Heaviside**, où $\kappa = 0$.

À la section I.B nous avons abordé l'importante propriété suivante :

$$\mathcal{L} \left(\frac{df}{dt}(t) \right) = sF(s)$$

La transformée de Laplace étant de plus **linéaire** on peut réécrire l'équation 4.2 comme suit :

$$Y(s) \sum_{n=0}^N \alpha_n s^n = U(s) \sum_{m=0}^M \alpha_m s^m, \quad (N, M) \in \mathbb{N}^2, \quad N > M.$$

On définit une fonction de transfert d'un système comme suit :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{m=0}^M \alpha_m s^m}{\sum_{n=0}^N \alpha_n s^n}, \quad (N, M) \in \mathbb{N}^2, \quad N > M. \quad (4.3)$$

Où $U(s)$ est l'entrée du système et $Y(s)$ sa sortie.

b) Un petit exemple

Voyons à présent un exemple de résolution d'EDLC rapide par le domaine de Laplace.

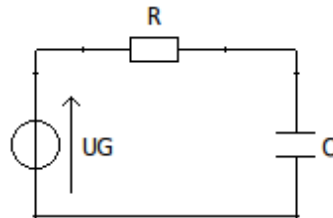


FIGURE 4.3 – Circuit RC série

Exemple 4.2 : Circuit RC série Soit un circuit RC série, tel que présenté à la figure 4.3.

On suppose le condensateur déchargé à l'origine des temps. On allume le générateur à $t = 0$, une tension E constante se retrouve aux bornes du générateur. On va calculer la fonction de transfert du système.

On dispose des équations électriques suivantes :

- L'intensité est la même le long d'un circuit série $I = I_C = I_R$.
- La loi d'Ohm aux bornes de la résistance : $U_R = RI$.
- La loi de fonctionnement d'un condensateur idéal : $I = C \frac{dU_C}{dt}$.
- La loi d'additivité des tensions² : $U_G = U_R + U_C$.

Ce qui nous donne l'équation différentielle suivante :

$$U_G(t) = RI(t) + U_C(t) = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C,$$

on va considérer nos variables d'entrée et de sortie du système :

- Entrée : Tension aux bornes du générateur $u(t) = U_G(t)$.

2. Dite de Kirchhoff.

— Sortie : Tension aux bornes du condensateur $y(t) = U_C(t)$.

On transforme l'équation différentielle dans le domaine Laplace dans les conditions d'Heaviside³ et on obtient :

$$U(s) = (RCs + 1)Y(s) \Leftrightarrow F(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 + RCs}.$$

On se rappelle des résultats sur les **EDLC**1 vus au chapitre 2. On sait que la solution de l'**EDLC** sera pour $t > 0$ (puisque $e(t) = E$ lorsque $t > 0$ –Générateur en marche–) :

$$y(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec } \tau = RC.$$

D'autre part, si nous considérons l'équation en transformée de Laplace, on a :

$$e(t) = E\theta(t) = \begin{cases} E & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{L}(e(t)) = U(s) = E\frac{1}{s}.$$

Ce qui donne :

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{1}{1 + RCs}E\frac{1}{s} = E\left(\frac{1}{s} - \frac{RC}{1 + RCs}\right).$$

et sa transformée de Laplace [d'après le tableau 4.1 présentant les transformées usuelles] inverses vaut :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec } \tau = RC,$$

Ce qui est le même résultat !

3. Le condensateur est déchargé au temps $t = 0$, c'est donc le cas.



On peut donc constater qu'une résolution d'EDLC dans le domaine de Laplace est équivalente à une résolution directe dans le domaine temporel. C'est même simplificateur car nous n'avons fait ici que des multiplications et des identifications sur une table de transformées pré-calculées en lieu et place de faire une résolution complète^a. Notons toutefois qu'il **est indispensable de se ramener dans les conditions d'Heaviside avant chaque calcul de fonction de transfert**.

^a. Impliquant le calcul de l'équation caractéristique, la résolution des équations homogènes, le choix d'une solution particulière, la sommation des solutions homogènes et particulières et l'identification des coefficients de l'équation.

c) Lien avec la convolution, réponse impulsionnelle d'un système

On reprend la propriété de multiplication/convolution (c)) entre les domaines de Laplace et temporel. Nous avons :

$$Y(s) = F(s)U(s) \Leftrightarrow y(t) = f(t) \star u(t)$$

Si on impose une impulsion de Dirac (on rappelle que $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$ à l'entrée du système, on obtient un signal temporel $y(t)$ qui est appelé **réponse impulsionnelle** du système. caractérisé par la fonction de transfert $F(s)$ on peut observer en sortie la propriété suivante :

$$y(t) = f(t) \star \delta(t) \Leftrightarrow Y(s) = F(s) \underbrace{\mathcal{L}(\delta(t))}_{=1} = F(s)$$

La **convolution de la réponse impulsionnelle** n'est autre que la **Fonction de transfert du système**.

II.B Stabilité des systèmes linéaires

La **stabilité** est la première propriété que doit s'assurer de respecter un système asservi. Sans cette condition, asservir un système n'a pas de sens car sa sortie diverge : il ne peut donc pas poursuivre un signal de référence.

a) Définition

La stabilité au sens **BIBO** d'un système physique peut être définie comme suit :

Un système est stable au sens BIBO (*Bound In Bound Out*) si pour une **entrée bornée** sa sortie est elle-même **bornée**. Ainsi :

$$F \text{ est stable au sens BIBO} \Leftrightarrow \{\exists A, B \in \mathbb{R}, \quad A, B < \infty, \quad |u(t)| < A \Rightarrow |y(t)| < B\}.$$

On peut démontrer avec la théorie des équations différentielles vue à la section 2 du chapitre 1 que ce critère équivaut à dire que les racines de l'équation caractéristique ont une **partie réelle strictement négative** dans le cas où le système n'est pas un oscillateur (stabilité **asymptotique**, c'est-à-dire **BIBO** et convergeant vers une valeur donnée). C'est ce qu'on appelle le **critère de stabilité** pour les systèmes linéaires.

b) Pôles et zéros

- Les **pôles** sont les racines de l'équation caractéristique homogène d'un système, il s'agit des racines du **dénominateur** de la fonction de transfert d'un système.
- Les **zéros** sont quant à eux les racines du **numérateur** de cette dernière.

Pour une fonction de transfert d'un système $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, on a les définitions suivantes :

$$p_i \in \mathbb{C}, \text{ est un pôle} \Leftrightarrow D(p_i) = 0,$$

respectivement :

$$z_i \in \mathbb{C} \text{ est un zéro} \Leftrightarrow N(z_i) = 0.$$

Remarque : Les pôles, racines de l'équation caractéristique sont de ce fait responsables de la stabilité et de la cinétique de système.

c) Critère de Routh

Basant sur ce que l'on a dit précédemment on déduit le critère de stabilité suivant :

$F(s)$ représente un **système stable** $\Leftrightarrow$ Ses pôles sont tous **à partie réelle strictement négative**.

Cela peut être compliqué de prime abord de prouver que les parties réelles des racines d'un polynôme d'ordre élevé (par exemple 42) sont strictement négatives. Un certain *Edward John Routh (1831-1907)*, mathématicien anglais a trouvé un stratagème bien efficace : un critère basé sur des déterminants. Il prouve que les racines d'un pôle sont à partie réelle positive sans avoir à faire l'étude exhaustive de ce dernier.

Objectif : Soit un système physique $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, nous devons vérifier que ses pôles sont tous «à gauche» du plan complexe⁴ c'est-à-dire que les racines du polynôme $D(s)$ sont toutes à partie réelle strictement négative pour **assurer la stabilité du système**.

Le polynôme étudié est le suivant :

$$D(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k, N \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{R}.$$

Vérifications préliminaires :

Condition nécessaire : Si les coefficients présentent (au moins) une alternance de signe **le système est instable**.

Condition suffisante à faible degré : Cette condition est suffisante si le degré du polynôme respecte $N \leq 2$. Dans ce cas seulement, une absence d'alternance de signe implique la **stabilité du système**

S'il existe $a_k = 0$ le système n'est pas asymptotiquement stable mais peut comporter un oscillateur harmonique. **Voir méthodes des perturbations.**

Si les coefficients du polynômes sont tous négatifs étudier $D'(s) = -D(s)$.

4. C'est-à-dire à partie réelle strictement négatives, je donne un aperçu de cette notion à la partie I de ce chapitre.

Critère : À appliquer si $N > 2$ dans cet ordre :

1. Commencer à remplir les deux premières lignes $(N, N - 1)$ du **tableau de Routh** avec les coefficients par ordre d'indice décroissant du polynôme $D(s)$. On commence en haut à gauche du tableau avec a^N (coordonnée (N, K)) puis on descend d'une case pour remplir a_{N-1} (coordonnée $(N-1, K)$) puis a_{N-2} en passant à la colonne de gauche et à la première ligne (coordonnée $(N, K-1)$) et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de coefficient.

Si le nombre de coefficients est pair, toutes les cases des lignes N et $N - 1$ seront remplies, sinon un zéro apparaîtra dans la dernière case de la ligne $N - 1$ du tableau comme suit :

Numéros	K	K-1	...	i	i+1	...	1	0
N	a_N	a_{N-2}	...	...	...	...	a_3 ou a_2	a_1 ou a_0
N-1	a_{N-1}	a_{N-3}	...	...	...	...	a_2 ou a_1	a_0 ou 0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
l+2	C_K^{l+2}	...	...	C_i^{l+2}	C_{i+1}^{l+2}	...	...	...
l+1	C_K^{l+1}	...	...	C_i^{l+1}	C_{i+1}^{l+1}	...	...	...
l	...	...	...	C_i^l	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	C_K^0	0	...	0	0	...	0	0

2. Calcul des valeurs des autres cases : on les calcule de gauche à droite et de bas en haut :

- À chaque ligne $l < N - 1$, on détermine le **pivot** : c'est le coefficient de la ligne du dessus et de la première colonne C_K^{l+1} .
- Les trois autres coefficient en sus du pivot sont indiqués en vert sur le tableau ci-haut sont impliqués dans le calcul de chacun des coefficients C_K^{l+1} en plus du **pivot** (qui peut être parmi ces quatre là).

$$C_i^l = \frac{C_K^{l+1} C_{i+1}^{l+1} - C_K^{l+2} C_{i+1}^{l+1}}{C_K^{l+1}} = -\frac{1}{C_K^{l+1}} \begin{vmatrix} C_K^{l+2} & C_{i+1}^{l+2} \\ C_K^{l+1} & C_{i+1}^{l+1} \end{vmatrix}.$$

- Si les deux coefficients à droite C_{i+1}^{l+2} et C_{i+1}^{l+1} sont nuls alors C_i^l est nul.
 - Si le **pivot** est nul, on arrête le calcul du tableau et on **applique la méthode des perturbations**.
3. Si un signe négatif apparaît dans la première colonne : LE SYSTÈME EST INSTABLE.
 4. Si vous êtes arrivé à la dernière ligne sans alternance de signe pour la première colonne, vous avez prouvé la STABILITÉ DU SYSTÈME ÉTUDIÉ.



Exemple 4.3 : Un système bien compliqué mais simple à étudier Soit

$$F(s) = \frac{120s+1}{s^8+s^7+s^5+544s^4+404s^3+254.25s^2+8s^1} \text{ étudier la stabilité.}$$

On remarque que $a_6 = a_0 = 0$ le SYSTÈME EST INSTABLE.



Exemple 4.4 : Un système du quatrième ordre Soit le système suivant, on veut savoir s'il est stable ou non :

$$F(s) = \frac{K}{s^4 + 4s^3 + 16s^2 + 32s^2 + 200} \text{ avec } K \in \mathbb{R}^*$$

- On se rend compte que le système n'est pas évident à étudier d'une manière directe. Trouver les racines de manière directe semble non-trivial. Appliquons le critère de Routh.
- La condition nécessaire est remplie (les signes sont tous positifs au dénominateur) et le système est d'un ordre supérieur à 2.
- On doit donc calculer le tableau de Routh :

Numéros	2	1	0
4	1	16	200
3	4	32	0
2	a	b	0
1	c	0	0
0	d	0	0

En commençant par remplir ce dernier avec **les coefficients du polynôme**.

— On calcule les coefficients manquants :

$$(a) \quad a = \frac{4 \times 16 - 1 \times 32}{4} = 8.$$

Le système est stable *a priori*, on doit continuer à calculer les coefficients de la première colonne mais c ne peut se calculer sans b .

$$(b) \quad b = \frac{4 \times 200 - 1 \times 0}{4} = 200$$

Attention : Le pivot ici «4» est le même pour une ligne donnée ! Et on reste à multiplier avec la première ligne.

$$(c) \quad c = \frac{32a - 4 \times b}{a} = \frac{32 \times 8 - 4 \times 200}{8} = -68.$$

On a prouvé l'instabilité du système car la première colonne subit une alternance de signe.

(d) Calcul inutile mais pour la culture personnelle :

$$d = \frac{c \times b - 0 \times a}{c} = b = +200.$$

Le système est instable. Numériquement, ses pôles valent (deux d'entre eux ont une partie réelle positive) :

$$p_{1,2} = -3.06 \pm 2.88j \text{ et } p_{3,4} = 1.06 \pm 3.20j.$$

Méthode des perturbations : Dans le cas où un zéro apparaît dans la première colonne empêchant la division par le pivot, étudier la stabilité de $D(s + \epsilon)$ avec $|\epsilon| \ll 1$. On crée un nouveau polynôme avec la méthode de Taylor en effectuant un développement limité [Wikipédia, 2019] d'ordre 1 :

$$D(s + \epsilon) = D(s) + \epsilon \frac{dD}{ds}(s) + O(\epsilon^2).$$

On étudie la nouvelle première colonne si $\epsilon > 0$ (cas 1) et si $\epsilon < 0$ (cas 2) :

Pas de signe négatif dans les deux cas : le système est **strictement stable**

Signe(s) négatif(s) dans les deux cas : Les pôles sont à gauche invariablement, le système est **strictement instable**.

Signe(s) négatif(s) dans un des cas, positif dans l'autre : si aucun pôle nul n'existe, il y a N pôles sur l'axe des imaginaires, $N = 2k$ avec k le nombre des

alternances de signe. Ce sont des oscillateurs : le système est stable au sens BIBO mais est dans un cas limite (il ne convergera pas vers une valeur mais ne divergera pas).



Exemple 4.5 : Système pathologique Étudier la stabilité de la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + s + 1}.$$

La condition nécessaire de stabilité est respectée et l'ordre du dénominateur est strictement supérieur à deux, on doit donc dresser le tableau de Routh. On le remplit et le calcule pour $D(s) = s^3 + s^2 + s + 1$:

s^3	1	1
s^2	1	1
s^1	a	0
s^0	b	0

Plein d'espoir, on calcule a :

$$a = \frac{1 \times 1 - 1 \times 1}{1} = 0.$$

Et on se rend compte que le futur pivot a de b vaut 0 on ne peut calculer b . On doit appliquer la **méthode des perturbations** :

$$\begin{aligned} D(s + \epsilon) &= D(s) + \epsilon \frac{dD}{ds}(s) + O(\epsilon^2) \\ &= s^3 + s^2 + s + 1 + \epsilon(3s^2 + 2s + 1) + O(\epsilon^2) \\ &= s^3 + (1 + 3\epsilon)s^2 + (1 + 2\epsilon)s + (\epsilon + 1) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Le nouveau tableau de Routh vaut :

s^3	1	$1 + 2\epsilon$
s^2	$1 + 3\epsilon$	$1 + \epsilon$
s^1	α	0
s^0	β	0

On calcule la première ligne calculable, en négligeant les termes en ϵ^2 et ordres plus élevés à cause du formalisme $O(\epsilon^2)$ symbolisant une approximation à l'ordre 1 :

$$\alpha = \frac{1}{3\epsilon + 1} [(2\epsilon + 1)(3\epsilon + 1) - \epsilon + 1 + O(\epsilon^2)] = \frac{4\epsilon}{3\epsilon + 1} + O(\epsilon^2).$$

Pour le dernier coefficient on a :

$$\beta = \frac{1}{\alpha} [\alpha(\epsilon + 1) + O(\epsilon^2)] = \epsilon + 1 + O(\epsilon^2).$$

Vu que $|\epsilon| \ll 1$, pour β il n'y a pas d'alternance de signe quel que soit le signe de ϵ et il reste positif. Pour α il y a une alternance de signe suivant le signe de ϵ . Enfin, $D(0) \neq 0$ donc zéro n'est pas un pôle, donc H a **deux pôles sur l'axe des imaginaires**.

De plus, il existe un troisième pôle, vu que l'ordre de H est de trois. Il est nécessairement réel car seul. Les pôles, racines d'équations caractéristiques, sont comme nous avons vu au chapitre 2 soit complexes conjuguées soit réels : les pôles non-strictement réels viennent par paires. Le troisième pôle est donc négatif car sinon le système serait **strictement instable**, or, la première colonne ne présente pas de coefficient invariablement négatif suivant le signe de ϵ .

Remarque : L'auteur a développé un petit code pédagogique *Open-Source* et pré-compilé pour les usagers des systèmes d'exploitations Linux et Windows afin de permettre un calcul numérique du tableau de Routh et de se vérifier. Il est téléchargeable à l'URL suivante : <https://gitlab.com/nitraced/rhcalc>.

II.C Précision des systèmes asservis

La précision a besoin de **critères** afin d'être définie correctement. Pour cela, on la quantifie par les notions d'**erreurs**. Nous nous devons de préciser cependant les notions de boucle ouverte et boucle fermée avant de nous lancer dans de telles discussions.

a) Définition de la boucle de rétroaction

Soit le système générique suivant :

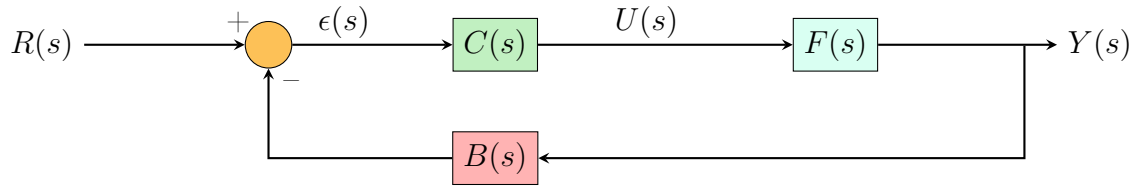


FIGURE 4.4 – Modèle générique d'un asservissement linéaire SISO en en schémas-blocs.

En lisant le schéma 4.4 on peut lire à reculons la composition du signal $Y(s)$ pour calculer la fonction de transfert d'un tel système :

$$Y(s) = F(s)U(s) = C(s)F(s)\epsilon(s) = C(s)F(s)(R(s) - B(s)Y(s)),$$

En isolant $Y(s)$ à gauche on trouve l'égalité suivante :

$$Y(s)(1 + C(s)F(s)B(s)) = C(s)F(s)R(s),$$

puis on trouve la fonction de transfert :

$$H(s) := \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)F(s)}{1 + B(s)C(s)F(s)}.$$



Propriété 4.8 : Fonction de Transfert en Boucle Fermée La fonction de transfert en **boucle fermée** du système est définie par :

$$H(s) = \frac{H_{BO}(s)}{B(s)H_{BO}(s) + 1},$$

Où $H_{BO}(s) = C(s)F(s)$ est la fonction de transfert en **boucle ouverte** du système qui est composée du **système physique** $F(s)$ et du **compensateur** $C(s)$. Nous étudierons la conception des compensateurs dans les pages qui suivent.



Retour unitaire : Afin de faciliter les calculs, on va souvent supposer la boucle de retour unitaire, c'est-à-dire que $B(s) = 1$. On peut toujours se ramener à cette configuration en faisant l'opération dans le schéma qui suit. On remarque que si on multiplie les branches $+$ et $-$ du sommateur par $B(s)$ il faut normaliser l'entrée par $B(s)$ afin de conserver l'équivalence avec le schéma de la figure 4.4. On étudie dans ce cas le système composé de la fonction de transfert en **boucle ouverte** $H_{BO} = B(s)C(s)F(s)$ et du retour unitaire.

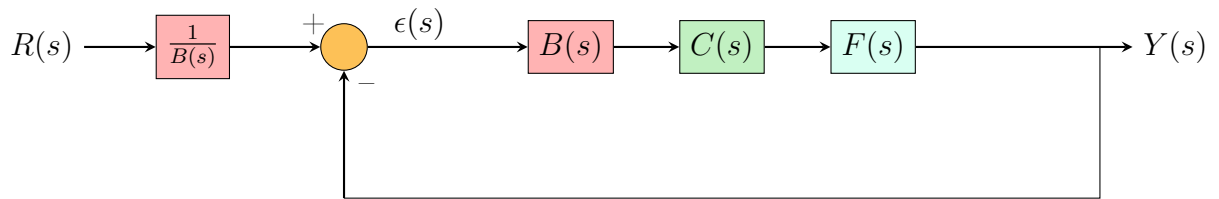


FIGURE 4.5 – Transformation d'un schéma à retour quelconque en un problème à retour unitaire.



Propriété 4.9 : Cas du retour unitaire Dans le cas d'un retour unitaire $B(s) = 1$ et ce cas seulement :

$$H(s) = \frac{H_{BO}(s)}{1 + H_{BO}(s)}.$$

b) Perturbations

On peut modéliser des événements extérieurs inopinés dans les systèmes asservis sous forme de perturbations. Elles prennent la forme d'un autre signal qui vient en sus de la commande $U(s)$ qui sort du **correcteur**. Il s'agit d'un signal que l'on ne désire pas (en quelque sorte du bruit additif). Ce signal est noté $P(s)$ est inclus dans le schéma-blocs comme suit :

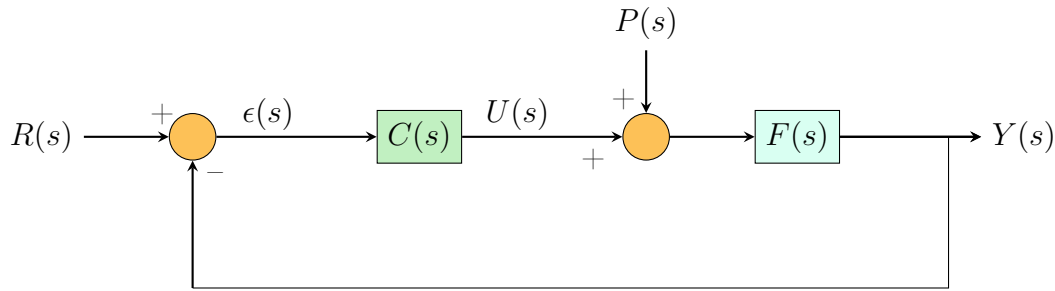


FIGURE 4.6 – Schéma-blocs générique d'un système linéaire SISO perturbé à retour unitaire.

c) Principe de superposition

Ce principe vient de la propriété de **linéarité** des EDLC, il assure en outre la propriété suivante : Si l'on considère deux entrées distinctes $E_1(s)$ et $E_2(s)$ reliées par deux fonctions de transfert $H_1(s)$ et $H_2(s)$ à un même signal de sortie $Y(s)$, alors l'étude du signal $Y(s)$ de sortie résultant peut se faire en sommant les deux réponses du système :

$$Y(s) = E_1(s)H_1(s) + E_2(s)H_2(s).$$

En particulier, ici, on peut faire l'étude séparée des réponses de $P(s)$ et de $R(s)$ pour deux schémas considérant les deux fonctions de transfert calculées avec un des deux signaux nuls :

$$Y(s) = H(s)|_{P(s)=0}R(s) + H(s)|_{R(s)=0}P(s).$$

Ceci va être utile dans les calculs en pratique, l'idée est de toujours se ramener au cas monovariante.

d) Définition des erreurs

On appelle **erreur de suivi** d'un système e_s l'erreur définie comme suit :

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) \quad \text{avec } \epsilon(t) = r(t) - y(t), \quad p(t) = 0.$$

Il s'agit de **l'écart entre la consigne et la sortie** sans perturbation. On appelle **erreur de régulation** d'un système e_r l'erreur définie comme suit :

$$e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t), \quad r(t) = 0.$$

Il s'agit de **la valeur de la sortie** pour une consigne nulle.

En pratique, en appliquant le théorème de la valeur finale des transformées de Laplace on peut calculer les limites de manière aisée. Pour l'erreur de suivi on peut remarquer la relation suivante (venant du schéma-bloc précédent, à la figure 4.6, considérant $P(s) = 0$) :

$$Y(s) = \epsilon(s)H_{BO}(s)|_{P(s)=0} = \epsilon(s)C(s)F(s) = H(s)|_{P(s)=0}R(s),$$

ce qui donne au final la formule suivante pour **l'erreur de suivi** :

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\epsilon(s)|_{P(s)=0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{H(s)|_{P(s)=0}R(s)}{C(s)F(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{C(s)F(s)}{1+C(s)F(s)}R(s)}{C(s)F(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + C(s)F(s)}. \end{aligned}$$

Pour la régulation, il suffit de modifier le schéma-blocs en remarquant que $R(s)$ est nul, comme illustré à la figure 4.7.

on applique la formule des boucles des schémas-blocs à retour non-unitaire et on trouve :

$$e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)|_{R(s)=0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F(s)}{1 + F(s)C(s)}P(s).$$

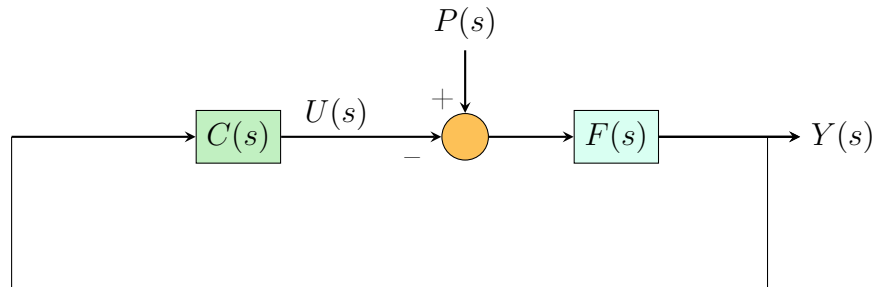


FIGURE 4.7 – Schéma-blocs du rejet de perturbation.

e) Principe du modèle interne

On remarque ainsi des corrélations entre les différentes erreurs et le rapport entre les consignes $R(s)$ (respectivement les perturbations $P(s)$) et le contrôleur $C(s)$. On déduira de cette observation qualitative l'adage⁵ suivant :

« Un contrôleur $C(s)$ doit être autant complexe que le signal $R(s)$ qu'il souhaite poursuivre et le signal perturbateur $P(s)$ qu'il souhaite rejeter. »

Ce principe est lié à la notion de **modèle interne**. Dans cet ouvrage, nous ne traitons que des cas de signaux monômes c'est-à-dire des signaux de la forme $\sigma(s) = \theta(t)Kt^n$ avec θ fonction d'Heaviside, $n \in \mathbb{N}$ ordre de la courbe à suivre et $K \in \mathbb{R}^*$ paramètre non-nul (facteur d'échelle).

On rappelle que ces signaux ont la forme suivante dans le domaine de Laplace $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(s) = \frac{K'}{s^{n+1}}$, $K' \in \mathbb{R}$. Nous devons donc quantifier la complexité du problème en fonction de n ...

5. L'auteur remercie le travail du Prof. Roland Malhamé, Polytechnique Montréal, pour avoir trouvé une explication claire au problème, se résumant dans cette phrase.

f) Classes des signaux et des systèmes asservis

Propriété 4.10 : Types/Classes des signaux monômes On appelle cette notion «type» dans la littérature nord-américaine et en France «classe». Les signaux et fonctions de transfert de type polynomiaux peuvent se transformer dans le domaine de Laplace de la façon suivante :

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^\alpha} \frac{N(s)}{D(s)},$$

$$\Sigma(s) = \frac{K}{s^\beta}.$$

Avec :



- $\Phi(s)$ fonction de transfert polynomiale quelconque ^a.
- Respectivement $\Sigma(s)$ signal monôme quelconque ^b.
- $\alpha \in \mathbb{N}$ nombre de pôles à $s = 0$ (intégrateurs) factorisables, c'est la **classe**/le **type** de la fonction de transfert.
- $\beta \in \mathbb{N}$ est respectivement la **classe**/le **type** de signal.
- $\frac{N(s)}{D(s)}$ rapport de deux **polynômes irréductibles** représentant le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert une fois les pôles à $s = 0$ factorisés.

^a. Cette fonction peut être le bloc correcteur $C(s)$ ou la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)F(s)$.

^b. Ce signal peut être $R(s)$ et $P(s)$ dans notre cas.

Remarque : Nous noterons la classe de la fonction de transfert/ du signal $A(s)$, $\mathcal{C}(A)$ afin d'alléger la notation.

g) Modèle interne appliqué à des signaux monômes



Propriété 4.11 : Déficit de classe et erreur de suivi Soit la fonction de transfert en **boucle ouverte** d'un système asservi $H_{BO}(s) = F(s)C(s)$ et un signal de référence $R(s)$ on a :

$$e_s = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathcal{C}(H_{BO}) - \mathcal{C}(R) \geq 0; \\ k \in \mathbb{R}, \quad |k| < \infty & \text{si } \mathcal{C}(H_{BO}) - \mathcal{C}(R) = -1; \\ \infty, & \text{si } \mathcal{C}(H_{BO}) - \mathcal{C}(R) < -1. \end{cases}$$

Un déficit nul de classe engendre une poursuite parfaite, un déficit unitaire engendre une erreur constante, au-delà, cela diverge.

Démonstration. Dans ce cas, nous avons la limite du signal ϵ qui vaut :

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + C(s)F(s)}.$$

si on note $R(s) = \frac{k}{s^a}$ avec $k \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{N}$ et $H_{BO} = C(s)F(s) = \frac{1}{s^b} \frac{D(s)}{N(s)}$ avec $b \in \mathbb{N}$ et $N(s)/D(s)$ constituant une fraction irréductible, on obtient :

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \frac{\frac{k}{s^a}}{1 + \frac{1}{s^b} \frac{D(s)}{N(s)}} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{s^{a-b}} \frac{k}{s^b + \frac{N(s)}{D(s)}}.$$

Si $a = b + 1$ alors on obtient une constante :

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \frac{k}{s^b + \frac{N(s)}{D(s)}} = k \frac{D(0)}{N(0)} \in \mathbb{R}.$$

notons que la limite de $\frac{k}{s^b + \frac{N(s)}{D(s)}}$ en zéro est finie.

Si $a > b + 1$ on a le terme $\frac{s}{s^{a-b}} = a^{-n}$ (avec $n \in \mathbb{N}$) qui diverge dans la limite. À l'opposé, le cas $b + 1 < a$ $\frac{s}{s^{a-b}} = a^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) fait converger la quantité vers zéro (poursuite parfaite). $\square$



Propriété 4.12 : Déficit de classe et erreur de régulation Soit la fonction de transfert du **correcteur** d'un système asservi $C(s)$ et un signal de perturbation $P(s)$ on a :

$$e_r = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathcal{C}(C) - \mathcal{C}(R) \geq 0; \\ k \in \mathbb{R}, \quad |k| < \infty & \text{si } \mathcal{C}(C) - \mathcal{C}(R) = -1; \\ \infty, & \text{si } \mathcal{C}(C) - \mathcal{C}(R) < -1. \end{cases}$$

Remarque : Le résultat au-dessus se démontre de manière analogue au précédent.

II.D Calculs sur la rapidité et les dépassements

a) Critères

Comment définir la rapidité de systèmes dynamiques n'atteignant qu'asymptotiquement, *ie* à l'infini, leurs valeurs finales (cf. chapitre 2) ? L'approche canonique est de considérer un temps de réponse à partir duquel la valeur demeure au sein d'un intervalle centré :

$$T_{r,P\%} \mathbb{R}^+, \frac{100 - P}{100} < \frac{y(\infty) - y(t)}{y(\infty) - y(0)} < \frac{100 + P}{100} \text{ avec } t > T_{r,P\%},$$

on appelle ce temps **le temps de réponse à P pour cent**. Dans la littérature on trouve des temps de réponse à $P = 1, 2, 5, 10...$ pour cent, ceci n'étant qu'une convention, on choisira pour ces notes de cour $P = 5$. Ce qui donne le critère :

$$T_{r,5\%} \mathbb{R}^+, 0.95 < \frac{y(\infty) - y(t)}{y(\infty) - y(0)} < 1.05 \text{ avec } t > T_{r,5\%}.$$

b) Systèmes d'ordre un

Un système du premier ordre détient une fonction de transfert comme suit :

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1},$$

sa réponse à un échelon unitaire (voir partie 2) vaut :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \times \frac{K}{\tau s + 1} \right) = K(1 - e^{-t/\tau}).$$

Donc, la valeur finale $y(\infty)$ d'un tel système est K et trouver la valeur qui donne 95% de la valeur finale revient à résoudre :

$$y(T_{r,5\%}) = 0.95y(\infty) = 0.95K \Leftrightarrow K[1 - e^{-T_{r,5\%}/\tau}] = 0.95K \Leftrightarrow \ln(0.05) = -\frac{T_{r,5\%}}{\tau},$$

ce qui donne :

$$T_{r,5\%} = -\ln(0.05)\tau \approx 3\tau.$$

c) Ordre 2

Un système de deuxième ordre, nous avons la fonction de transfert comme suit :

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

On remarque que le paramétrage des pôles de ce système de deux paramètres : ω_0 et ξ . Nous pouvons cependant donner quelques formules utiles. Tout d'abord le système du second ordre possède dans le pire des cas un temps de réponse à cinq pour cent qui est trois fois l'inverse de sa pulsation propre :

$$T_{r,5\%} \leq \frac{3}{\omega_0}.$$

Si on considère que le facteur d'amortissement est assez grand, $\xi > 0.3$ on peut considérer l'approximation suivante :

$$T_{r,5\%} \approx \frac{3}{\xi\omega_0}. \quad (4.4)$$

D'une façon plus exacte, le profil du temps de réponse normalisé $T_N = \omega_0 T_{r,5\%}$ en fonction de ξ peut être calculé par ordinateur. Et ainsi, un abaque bien connu des automaticiens peut être utilisé pour les calculs de cinétique : il est visible en figure 4.8. L'automaticien peut utiliser cet abaque dans sa conception.

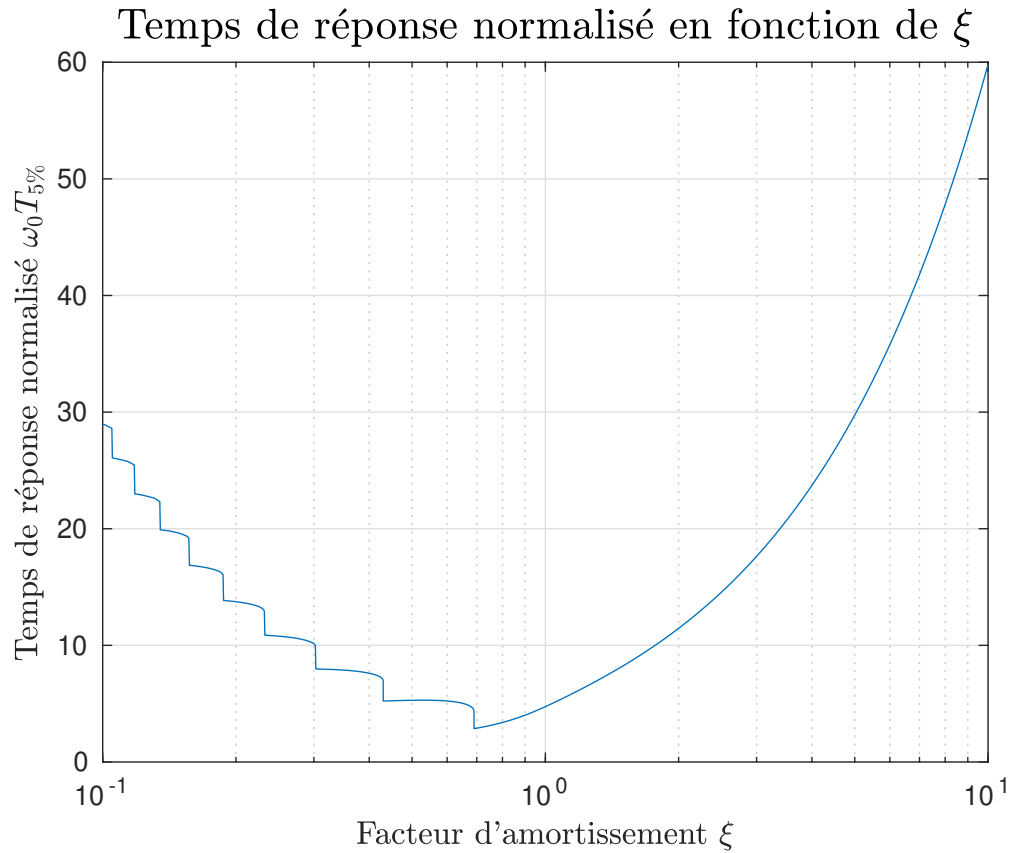


FIGURE 4.8 – Abaque montrant l'évolution du temps de réponse normalisé en fonction du coefficient d'amortissement.

On remarquera que le minimum des temps de réponses avoisine les 0.7 c'est-à-dire lorsque les pôles sont placés de manière à ce que $\Re\{p_i\} = \Im(p_i)$.

Également, les parties discontinues à gauche de l'abaque sont obtenues lorsque le facteur d'amortissement est inférieur à 1. Le système est dans un régime pseudo-périodique et provoque des sauts au sein de cet abaque. Par exemple, supposons que l'on rentre dans la bande des $\pm 5\%$ lors de la n -ème oscillation ($n > 1$), si on augmente ξ le système sera plus vite amorti et à un moment donné, cela se produira à la $(n - 1)$ -ème, à une pseudo-période d'intervalle : d'où le saut.

Remarque : Il n'existe pas de formules triviales pour les ordres supérieurs, nous verrons que cela nous importe peu par la suite, nous essaierons toujours de nous ramener au problème de calcul pour des ordres peu élevés en négligeant des termes. Nous verrons notamment les notions de dominance des pôles.

II.E Dépassements des systèmes asservis

Le dépassement est dû à la **partie imaginaire** des pôles. On utilisera plutôt le facteur d'amortissement ξ afin de quantifier le dépassement. Pour un ordre 2⁶, nous avons la relation suivante qui s'applique, liant ξ et le dépassement en pour cent %OS pour *overshot percent* :

Si $\xi < 1$ (s'il existe des oscillations, régime pseudo-périodique vu au chapitre 2), on a les deux relations suivantes :

$$\xi = \frac{\ln\left(\frac{100}{\%OS}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{100}{\%OS}\right)}} \Leftrightarrow \%OS = 100 \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right). \quad (4.5)$$

Démonstration. La pseudo-période des oscillations d'un système du second ordre vaut (voir chapitre 2) :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}},$$

6. Il n'y a pas de dépassement pour un ordre 1.

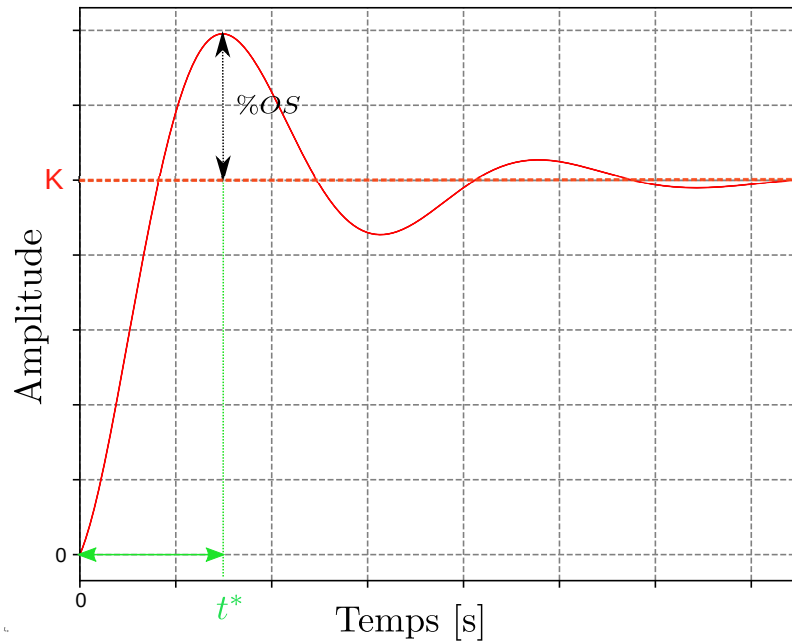


FIGURE 4.9 – Illustration du dépassement pour un système d'ordre deux.

en effet, la réponse d'un système d'ordre deux en régime pseudo-périodique peut s'écrire sous la forme (si $0 < \xi < 1$) (voir chap 2) :

$$y(t) = K \left[1 - e^{-t\omega_0\xi} \cos(t\omega_0\sqrt{1-\xi^2}) \right],$$

avec K l'amplitude, nous n'introduisons pas de déphasage ici.

La valeur maximale (première oscillation) est atteinte en $T/2$ c'est-à-dire lorsque $t = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} := t^*$. En effet, lorsque l'argument du cosinus est π ce dernier vaut -1 , ce qui donne la première bosse visible sur la figure 4.9.

La valeur en t^* de y est, en utilisant des formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned} y(t^*) &= K \left[1 - e^{-\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}\omega_0\xi} \cos(\pi) \right] \\ &= K \left[1 + e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right] \end{aligned}$$

Le dépassement en pourcentage est par convention égal à :

$$\%OS = 100 \frac{y(t^*) - K}{K} = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}.$$

La réciproque pour trouver ξ se démontre en prenant le logarithme de l'expression précédente. Nous laissons le lecteur agir. $\square$

III Preuve du théorème de la valeur finale

Preuve du Théorème 1. Le signal converge donc, on peut définir $\tilde{y} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ sa valeur finale. Par ailleurs en introduisant la fonction d'Heaviside $\theta(t)$ on peut définir :

$$z(t) = y(t) - \theta(t)\tilde{y},$$

et donc par conséquent que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0,$$

nous venons de montrer que nous pouvons nous ramener à prouver que le signal converge vers zéro à l'infini. Maintenant, qu'en est-il de la quantité $sZ(s)$? On peut découper la transformée de Laplace par linéarité de l'intégrale en deux intervalles :

$$sZ(s) = s \int_{\lambda=0}^t z(\lambda)e^{-\lambda s} d\lambda + s \int_{\lambda=t}^{\infty} z(\lambda)e^{-\lambda s} d\lambda$$

pour chaque t il existe un réel $\epsilon > 0$ qui borne la valeur absolue de $f(t)$, $\epsilon \geq |z(t)|$. Nous voulons prouver que le résultat est nul quel que soit $z(t)$ satisfaisant une limite nulle. Pour le premier intervalle, il est clair que :

$$\left| s \int_{\lambda=0}^t z(\lambda)e^{-\lambda s} d\lambda \right| \leq s \int_{\lambda=0}^t |z(\lambda)| d\lambda \rightarrow_{s \rightarrow 0^+} 0.$$

Pour le second, on prendra $s \in \mathbb{R}^+$, il existe un réel $a > 0$ tel que $s < a$. Dans ce cas peut borner le module de l'intégrale comme suit :

$$\left| \int_{\lambda=t}^{\infty} z(\lambda)e^{-\lambda s} d\lambda \right| \leq \int_{\lambda=t}^{\infty} \epsilon e^{-\lambda s} d\lambda = \frac{\epsilon}{s}$$

donc on peut trouver $b > 0$ qui contraint $0 < p < b$ et pour lequel :

$$\left| s \int_{\lambda=t}^{\infty} z(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda \right| \leq \int_{\lambda=t}^{\infty} \epsilon e^{-\lambda s} d\lambda \leq \epsilon$$

en faisant tendre t vers l'infini, on fait tendre l'intégrale précédente vers zéro.

Les inégalités sur les deux intervalles assurent que :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} sz(t) = 0,$$

quel que soit $z(t)$ convergente en 0 (et donc pour tout $y(s)$ convergeant en $\tilde{y}$). □

Quelques notes sur l'identification des systèmes ★

Nous savons qu'en pratique, le modèle d'un système ne nous est pas donné. Et pourtant, grâce à des réponses à un échelon unitaire, on peut extrapoler beaucoup d'informations.

Pourquoi identifier des systèmes d'ordres peu élevés (1 ou 2)? Dans le cadre général, les équations différentielles linéaires à coefficients constants ne se résolvent analytiquement que pour des ordres inférieurs ou égaux à deux. Ce n'est pas mathématiquement assuré pour des ordres plus élevés. Ceci étant, un système d'ordre plus élevé peut être approché par commodité de calcul par un ordre 2 afin d'entreprendre la conception d'un contrôleur. Si le système est plus complexe (ex : multivariable), une conception par fonction de transfert s'avère être moins efficace qu'une approche par modèle d'état.

I Méthodes graphiques

I.A Identification d'un système de premier ordre

Un système du premier ordre est caractérisé par une fonction :

$$F(s) = \frac{K}{1 + \tau s},$$

par définition, si l'entrée du système est un échelon de valeur $u(t) = A \in \mathbb{R}$, si $t > 0$ alors, le **gain statique** K vaudra :

$$\hat{K} = y(\infty)/A.$$

En pratique, le temps infini de la réponse d'un tel système n'est que formel (et heureusement), tout système stable convergeant vers une valeur finale et finie, on pourra utiliser cette valeur-ci pour le restant en guise de $\hat{y}(\infty)$. En ce qui concerne τ on peut remarquer que :

$$y(\tau) = (1 - e^{-\tau/\tau})KA = (1 - e^{-1})KA \approx 0.63KA = 0.63y(\infty),$$

il suffit de noter l'abscisse de la valeur de la sortie $y(t)$ telle que sa valeur soit égale à 63% sa valeur finale $y(\infty)$ pour obtenir un estimé $\hat{\tau}$.



Exemple 5.1 : Système d'ordre 1 On trace le chronogramme de la réponse à un échelon unitaire du système $H(s) = \frac{10}{3s+1}$. Vérifions que la fonction de transfert correspond à l'aide de la méthode précédente.

Dans l'exemple donné à la figure 5.1, il s'agit d'une réponse à un échelon unitaire ($A = 1$) donc immédiatement on estime $\hat{K} = 10$ valeur à l'asymptote. Pour le temps caractéristique on trouve $\hat{\tau} = 3.0$ en arrondissant à une décimale vu qu'aucune donnée ne va au delà en termes de précision sur le graphique.

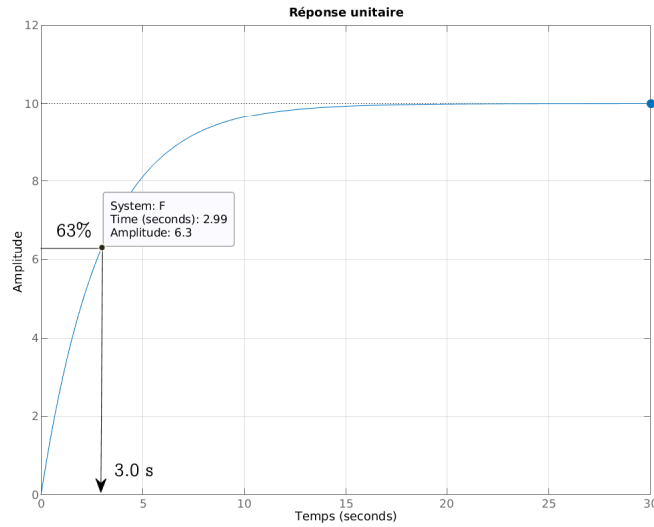


FIGURE 5.1 – Identification graphique d'un système de premier ordre

I.B Identification d'un système de deuxième ordre oscillant

Soit la fonction de transfert générique d'ordre deux sous forme canonique qui suit :

$$F(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi s}{\omega_0} + 1}, \quad 0 < \xi < 1.$$

Plusieurs techniques d'identification ne requérant aucun ordinateur existent. La plus populaire est présentée ci dessous. Si l'on suppose que le système oscille assez, on peut effectuer le test suivant pour une réponse indicielle (réponse à un échelon). Par définition, si l'entrée du système est un échelon de valeur $u(t) = A \in \mathbb{R}$, si $t > 0$ alors, le **gain statique** K vaudra :

$$\hat{K} = y(\infty)/A,$$

Ensuite, il suffit de relever la pseudo-période T_0 graphiquement du signal oscillant. On peut remarquer que :

$$\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

En ce qui concerne ξ connaissant T_0 , il suffit de relever le moment où le système entre dans une bande de $\pm 5\%$ autour de sa valeur finale et on obtient $T_{r,5\%}$ (le temps de réponse à cinq pour cent). Connaissant ceci, avec l'abaque de la figure 4.8, ou la formule reliant dépassement et coefficient d'amortissement, on détermine la pulsation réduite $T_{r,5\%}\omega_0$ et ainsi le facteur d'amortissement graphiquement.



Exemple 5.2 : Ordre deux On trace la réponse à un échelon d'amplitude $A = 0.5$ du système ayant la fonction de transfert suivante $H(s) = \frac{20}{s^2 + 0.6s + 1}$. Vérifions que l'identification donnée par la méthode précédente est en adéquation avec les «vrais» paramètres à savoir $K = 10, \omega_0 = 1$ et $\xi = 0.3$.

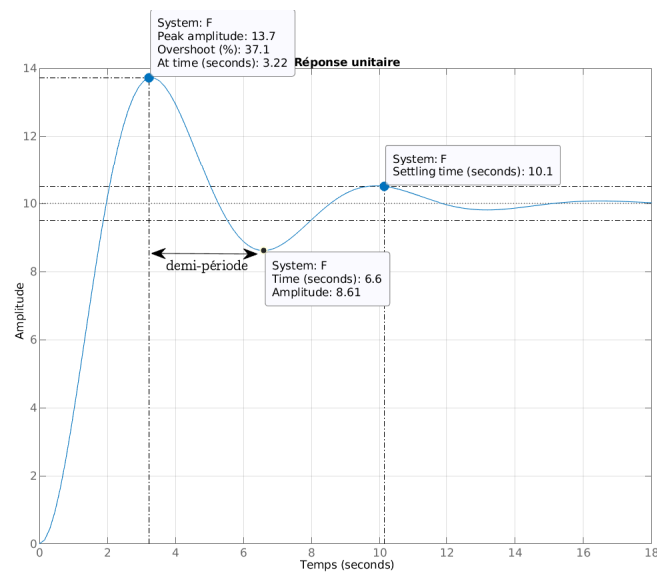


FIGURE 5.2 – Identification graphique d'un système de deuxième ordre.

Le chronogramme de la figure 5.2 nous donne immédiatement $\hat{K} = 20$ car $A = 0.5$ et $y_\infty = 10$ graphiquement.

Sachant le dépassement de 37.1% on peut appliquer la formule donnée directement pour déduire ξ en notant $\hat{x} = \ln(100/37.1) \approx 0.992$ on a :

$$\hat{\xi} = \frac{\hat{x}}{\sqrt{\pi^2 + \hat{x}^2}} \approx 0.301.$$

De plus, la demi-période¹ relevée graphiquement vaut environ $0.5\hat{T}_0 \approx 3.22$ s. Donc $\hat{\omega}_0 = \frac{\hat{T}_0}{2\pi\sqrt{1-\xi^2}} = 1.07$.

Alternativement, on peut utiliser l'abaque de la figure 4.8. Le temps de réponse à cinq pour cent estimé est $\hat{T}_{5\%} \approx 10.1$ et donc $\hat{\omega}_0\hat{T}_{5\%} \approx 10.9$, et donc on relève $\xi \approx 0.3$. Ce qui est en accord avec nos calculs

Cet exemple nous montre que nous pouvons estimer raisonnablement bien les caractéristiques d'un système oscillant d'ordre deux en ne connaissant uniquement que sa réponse indicielle.

II Autres méthodes graphiques

Pour la culture du lecteur, nous mentionnons ici deux modèles populaires intégrant des fonctions de transfert, qui s'avèrent parfois être utiles en pratique (latence d'effecteurs, non-linéarités, ordres élevés), pour concevoir des asservissements de systèmes industriels.

II.A Approximation par modèle de Broïda

Le modèle de Broïda est simplement un premier ordre auquel on adjoint un retard L (voir figure 5.3) :

$$F_{\text{identifiée}} = e^{-Ls} \frac{K}{1 + \tau s}.$$

Ainsi, on peut déterminer le temps de Latence L graphiquement² (début de l'acquisition donnant une réponse nulle), ensuite une identification classique d'un premier ordre peut se faire.

1. Rigoureusement pseudo-période.

2. Plusieurs algorithmes numériques existent pour faire «coller» le modèle. Notamment ceux basés sur la méthode des moindres carrés (*Least Squares*).

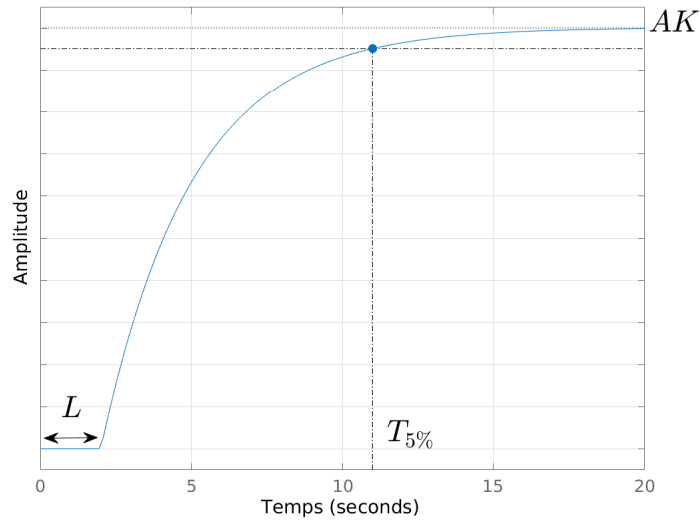


FIGURE 5.3 – Modèle de Broïda.

Le modèle de Broïda est utile de par sa simplicité, toutefois, introduire une latence au sein d'une fonction de transfert la rend non-linéaire. Cette technique est utilisée surtout en industrie pour sa mise en œuvre rapide.

II.B Approximation par modèle de Strejc

Le modèle de Strejc revient à extrapoler une courbe de réponse indicielle d'un système physique à une réponse fonction de transfert de la forme :

$$F_{\text{identifiée}}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(1 + \tau s)^n},$$

avec :

- n , entier ordre du système identifié.
- τ , temps caractéristique du système étudié.
- K , gain statique du système étudié.

On remarquera, par transformation inverse de Laplace et en utilisant le binôme de Newton que la réponse indicielle à un échelon vaut :

$$y(t) = KA \left(1 - \exp(-t/\tau) \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k! \tau^k} \right),$$

la dérivée de cette réponse temporelle vaut :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{KA}{\tau^n} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

la dérivée seconde vaut :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{KA}{\tau^n} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \frac{t^{n-2}}{(n-1)!} (n-1 - t/\tau),$$

que nous voyons disposer d'un unique point annulateur (non-trivial $t > 0$) en $t = \tau(n-1)$, appelé **point d'inflexion**.

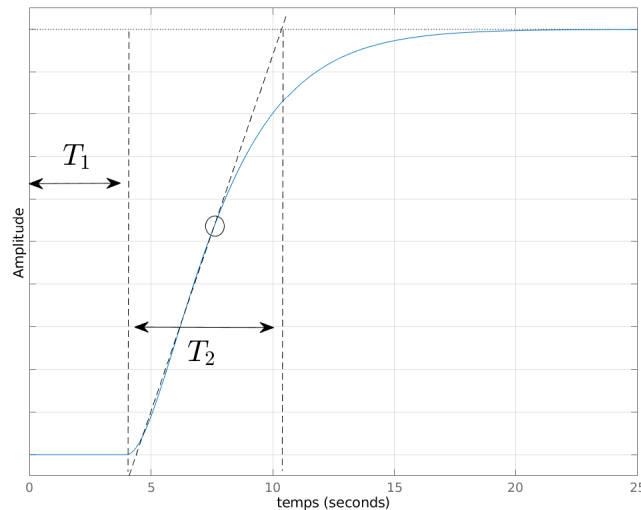


FIGURE 5.4 – Modèle de Strejc.

Afin d'identifier une telle fonction de transfert, l'automaticien aura à identifier deux temps caractéristiques en sus du gain statique K . Sur la figure 5.4, on trace

l'asymptote du régime permanent et on en déduit K . Ensuite, on identifie le point d'inflexion (changement de signe de la dérivée seconde) sur le tronçon ascendant de la courbe, ce point peut être vu comme celui qui maximise la pente de la courbe. Il est marqué d'un cercle sur la figure. Par construction géométrique on en déduit les temps T_1 et T_2 .

Ensuite, il suffit de calculer le rapport T_1/T_2 et de trouver l'ordre n le plus proche (arrondi à l'inférieur) dans la table 5.1. Une fois n identifié, il suffit de trouver τ à l'aide de T_2/τ ou de T_1/τ .

TABLE 5.1 – Valeurs tabulées pour la méthode de Strejc.

Ordre	T_1/τ	T_2/τ	T_1/T_2
1	0	1	0
2	0.28	2.72	0.22
3	0.81	3.70	0.22
4	1.43	4.46	0.32
5	2.10	5.12	0.41
6	2.81	5.70	0.49

L'explication du modèle est adaptée de celle [donnée à ce lien](#), la méthode étant graphique et basée sur des abaques et tableaux pré-calculés [Laroche, 2008]. Cette méthode est une méthode d'identification approchée permettant d'être effectuée sans utiliser un programme sophistiqué.

III Estimation par moindres-carrés non-linéaires

Ces notes expliquent comment on procède en pratique à une identification de paramètres lorsqu'on dispose de moyens informatisés. Nous encourageons le lecteur à les lire tout en étant conscients que la théorie de l'estimation n'est pas le but premier du présent cours.

III.A Équation de mesure de la réponse à l'échelon

Supposons que nous ayons accès à l'expression analytique de la réponse à un échelon de tension quelconque A dans le domaine temporel d'un système d'ordre N que nous voulons identifier.

Par exemple supposons un premier ordre :

$$f(t; K, \tau) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{AK}{1 + s\tau} \right) = AK(1 - e^{-\tau/t}),$$

on disposera de points de mesure $y_i = y(t_i)$ contenus dans un vecteur $\mathbf{y}$ de n points mesurés à chaque temps t_i de la sortie.

On suppose qu'il existe à chaque mesure une erreur ν_i entre le modèle et la mesure :

$$y_i = f_i(t_i; \mathbf{x}) + \nu_i,$$

avec $\mathbf{x}$ contenant les paramètres du système d'ordre N . Dans l'exemple au-dessus, il s'agit simplement de $\mathbf{x} = [K, \tau]^\top$.

La méthode qui va être présentée dans les lignes qui suivent limite l'effet de l'erreur de mesure ν_i en tendant à minimiser l'erreur quadratique entre modèle et mesure, c'est-à-dire estimer le jeu de paramètres $\hat{\mathbf{x}}$ qui satisfait :

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n [y_i - f_i(t_i; \mathbf{x})]^2.$$

En pratique, nous allons réarranger la fonction d'erreur précédente dans un «grand» vecteur de $\mathbb{R}^n$, $f(\mathbf{x}) = [\dots, f_i(t_i, \mathbf{x}), \dots]^\top$ tout comme $\mathbf{y} = [\dots, y_i, \dots]^\top$. Ainsi on essaie d'obtenir le même résultat mais sous forme vectorielle :

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - f(\mathbf{x})\|^2.$$

III.B Éléments de théorie

a) Moindres carrés linéaires

Nous nous intéressons dans un premier temps au système linéaire suivant :

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x},$$

avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. On connaît une série de valeurs mesurées de $\mathbf{y}$ (qui peuvent être bruitées), la matrice $\mathbf{C}$ est connue, elle est appelée modèle. Le but de notre approche est d'estimer le vecteur de paramètres $\mathbf{x}$.

On supposera que $m > n$ (on dispose de plus de mesures que d'équations de modèle liant les paramètres aux observations).

Notre but est donc de trouver $\mathbf{x}$ et l'idée principale est de trouver $\mathbf{x}$ qui minimise le résidu quadratique suivant :

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{2} [\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}]^\top [\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}],$$

Remarque : Le critère de pénalisation précédent est en fait une minimisation de la somme des carrés non-expliqués par le modèle. Le coefficient positif devant cette expression n'a aucune incidence sur le problème d'estimation et n'est ici que pour ne pas "promener" un 2 dans toutes les expressions des dérivées.

On dérive par rapport à $\mathbf{x}$ l'équation précédente et on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x})^\top,$$

et le minimum est atteint en égalant la dérivée précédente avec le vecteur nul (on peut transposer le vecteur nul sans trop de danger, il faut juste veiller à respecter les dimensions de ce dernier...) :

$$\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^* = \mathbf{0},$$

la notation $*$ illustrant la valeur de $\mathbf{x}$ qui minimise la quantité précédente.

Remarquons que $\mathbf{C}$ n'est pas carrée en général, on ne peut donc pas l'inverser (heureux sont ceux qui ont reconnu la forme d'un système linéaire!). Si $\mathbf{C}$ est de rang n alors $\mathbf{C}^\top \mathbf{C}$ est inversible, on peut donc multiplier l'équation précédente opportunément par $\mathbf{C}^\top$:

$$\mathbf{C}^\top \mathbf{y} - \mathbf{C}^\top \mathbf{C}\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$$

ainsi, on obtient la solution du problème de moindres carrés en utilisant la **pseudo-inverse** de la matrice $\mathbf{C}$ à savoir :

$$\mathbf{C}^\dagger = (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^\top,$$

ce qui donne l'estimé $\hat{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}$ au sens des moindres carrés minimisant J suivant :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^* = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{y}.$$

b) Dérivation du problème dans le cas non-linéaire

Soit le modèle de mesure suivant :

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}),$$

Nous cherchons donc à trouver $\hat{\mathbf{x}}$ qui minimise le résidu suivant :

$$J = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - f(\mathbf{x})\|^2 := \frac{1}{2} \|\mathbf{r}\|^2$$

où $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ sont des mesures qui ont été prises par des capteurs et $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ une fonction continue et différentiable avec $\mathbf{x} \in \mathbb{N}$ arguments.

En dérivant la fonctionnelle précédente, on arrive à l'expression qui suit :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{r}^\top \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}},$$

avec $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}}$ matrice jacobienne de la fonction de résidu $\mathbf{r}$. Si $\mathbf{x} := \hat{\mathbf{x}}$:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{y} - f(\hat{\mathbf{x}})] = \mathbf{0},$$

Afin de résoudre l'équation précédente qui est une équation normale, on peut linéariser le système, et procéder de manière itérative (interpolation linéaire) en se donnant un estimé initial $\hat{\mathbf{x}}^0$:

$$f(\mathbf{x}^k) \approx f(\hat{\mathbf{x}}^{k-1}) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}^{k-1}) \delta \mathbf{x}^{k-1},$$

Notant $\delta \mathbf{y}^k := \mathbf{y} - f(\hat{\mathbf{x}}^k)$ ainsi si $\delta \mathbf{x}^k$ respecte l'équation normale également, on aura en notant $\mathbf{J} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}^{k-1})$:

$$-\mathbf{J}^\top (\delta \mathbf{y}^k - \mathbf{J} \delta \mathbf{x}^k) = \mathbf{0},$$

ce qui peut, après réarrangement des termes s'exprimer ainsi :

$$\delta \mathbf{x}^k = (\mathbf{J}^\top \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^\top \delta \mathbf{y}^k,$$

afin de trouver $\hat{\mathbf{x}}^k$ on doit appliquer le schéma suivant :

$$\hat{\mathbf{x}}^k = \hat{\mathbf{x}}^{k-1} + \delta \mathbf{x}^k.$$

On peut résumer l'algorithme comme suit :

Initialisation : choisir un estimé initial $\hat{\mathbf{x}}^0$ ainsi qu'un nombre de pas N et une valeur résiduelle minimale ϵ .

Récurrence : propager en évaluant à chaque pas $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}^{k-1})$:

$$\hat{\mathbf{x}}^k = \hat{\mathbf{x}}^{k-1} + (\mathbf{J}^\top \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^\top [\mathbf{y} - f(\hat{\mathbf{x}}^{k-1})],$$

Condition d'arrêt : si $k = N$ ou $\epsilon > \|\mathbf{y} - f(\hat{\mathbf{x}}^{k-1})\|$, s'arrêter et prendre l'estimé $\hat{\mathbf{x}} := \hat{\mathbf{x}}^k$.

III.C Application

Pour un système du premier ordre, la fonction de réponse à un échelon unitaire $f(t)$ est la suivante :

$$f(t) = K(1 - e^{-t/\tau}),$$

les paramètres à identifier sont le gain statique K et la constante de temps τ . La jacobienne par rapport au vecteur de paramètre $\mathbf{x} = [K, \tau]^\top$ vaut :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial K} & \frac{\partial f}{\partial \tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t/\tau} & -\frac{Kt}{\tau^2} e^{-t/\tau} \end{bmatrix}.$$

On choisit les estimés initiaux $\mathbf{x}_0$ avec par exemple la méthode expliquée à la section I.A, puis nous implémentons l'algorithme des moindres carrés non-linéaires.

Exemple 5.3 : Système du premier ordre Simulons sur Matlab une séquence de mesures à 10 Hz de 15s de la sortie du système suivant :

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1}, K = 10, \tau = 3,$$

la sortie mesurée doit être simulée avec un bruit de mesure gaussien centré de variance $\sigma^2 = 1$. Arrive-t-on à bien estimer les paramètres ?



Définition du bruit gaussien : Un bruit gaussien ν est une variable aléatoire continue suivant la loi de probabilité suivante :

$$f_\nu(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

avec μ la moyenne du bruit et σ son écart-type (σ^2 est appelé variance). Un bruit gaussien centré, comme notre bruit, est par abus de langage un bruit gaussien centré en zéro, c'est à dire de moyenne μ nulle.

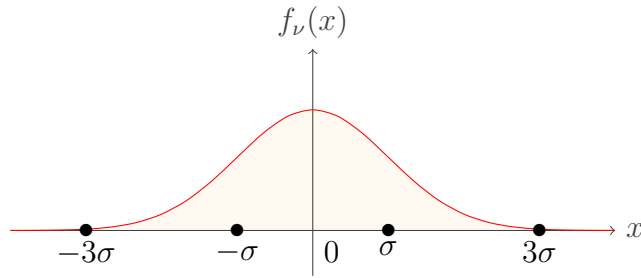


FIGURE 5.5 – Distribution gaussienne centrée.



Propriété 5.1 : Règle des 3 σ La probabilité d'obtenir une valeur de ν telle que $-3\sigma < \nu < 3\sigma$ est d'environ 99,8%. L'aire sous la courbe de $f_\nu(x)$ pour x appartenant à ce domaine, qui donne la probabilité que ν appartienne à ce dernier, est visualisée en orange sur la figure 5.5.

Démonstration. On remarque que $f_X(x)$ est une fonction paire par conséquent :

$$p_{3\sigma} = P(-3\sigma < X < 3\sigma) = 2P(0 < X < 3\sigma),$$

ce qui donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned} p_{3\sigma} &= 2 \int_{x=0}^{3\sigma} f_X(x) dx = 2 \int_{x=0}^{3\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]_0^{3\sigma} \\ &= \operatorname{erf}\left(3/\sqrt{2}\right) \approx 0.9973. \end{aligned}$$

avec erf l'intégrale de la distribution gaussienne, la fonction d'erreur gaussienne. $\square$

Retour à l'exemple : Premièrement, on va exprimer la «vraie valeur» le la sortie :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(E(s)H(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} \frac{K}{\tau + s}\right) = K(1 - e^{-t/\tau}),$$

numériquement on aura la mesure discrétisée dégradée suivante :

$$\tilde{y}_i = 10(1 - e^{-t_i/3}) + \nu,$$

avec ν valeur aléatoire gaussienne de variance 1 et $t_i = i\delta t$, $\delta t = 1/10 = 0.1$ s car on mesure avec une fréquence d'échantillonnage de dix hertz. Nous écrivons la simulation ci-dessous :

```

1 %% Simulation des mesures
2 K = 10; % Vrais parametres
3 tau = 3;
4 t = 0:0.1:15; % Vecteur de temps
5 y_vrai = K*(1-exp(-t/tau)); % Mesure parfaite
6 y_mesure = y_vrai + randn(size(y_vrai)); % Bruit additif
7
8 % Tracés
9 plot(t,y_vrai)
10 hold on ; grid on;
11 scatter(t,y_mesure)
12 xlabel('Temps [s]','Interpreter','latex','FontSize',16);
13 ylabel('Amplitudes [N/A]','Interpreter','latex','FontSize',
    ,16);
14 legend('Mesures parfaites','Mesures bruitees','Interpreter','
    latex','FontSize',16,'Location','best')
```

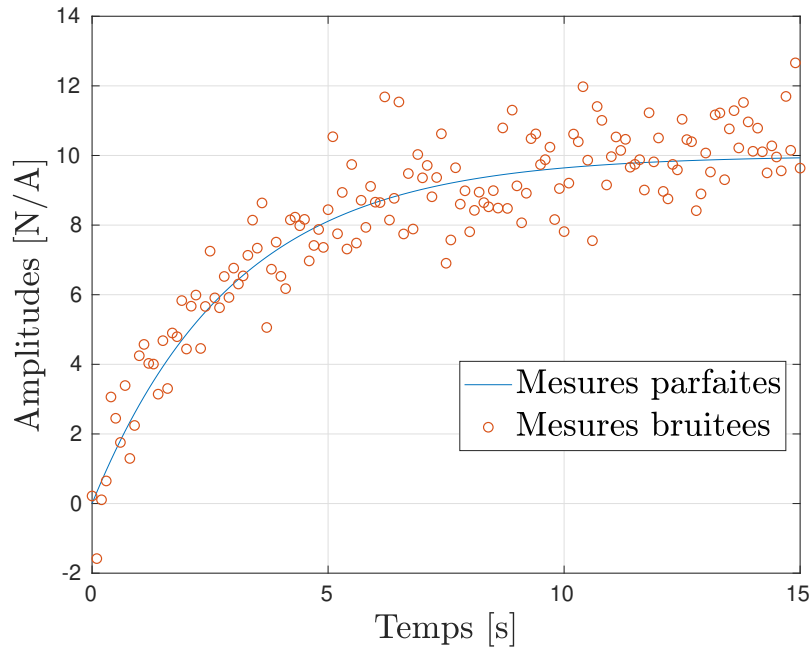


FIGURE 5.6 – Génération des mesures

Nous remarquons que le capteur est bruité, nous pouvons écrire l'algorithme des moindres carrés en prenant les valeurs initiales inexactes $\hat{K}^0 = 5$ et $\tau^0 = 1.5$ (la moitié des vraies valeurs).

L'algorithme peut s'implémenter ainsi :

```

1  global t
2  K = 5; tau = 1.5; % Valeurs initiales des parametres tau et K
3  x = [K,tau]'; % Vecteur initial
4  N = 20; % Nombre d'itérations
5  for i=1:N %Boucle principale
6      % Calcul de la jacobienne
7      J = [(1-exp(-t/tau))', -((K*tau/tau^2).*exp(-t/tau))
            '];
8      % Vecteur de paramètres mis a jour
9      x = x + ((J'*J)^-1)*J'*(y_mesure-f(tau,K))';
10     % Gestion des valeurs
11     K = x(1);
12     tau = x(2);
13 end
14 % Reponse temporelle en fonction des paramètres estimés
15 function y = f(K,tau)
16     global t
17     y=K*(1-exp(-t/tau));
18 end

```

On calcule les valeurs de la jacobienne où chaque ligne correspond à un temps de mesure t_i :

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t_i/\hat{\tau}} & -\frac{\hat{K}t_i}{\hat{\tau}^2}e^{-t_i/\hat{\tau}} \end{bmatrix}$$

et les lignes du vecteur de résidus

$$r_i = \tilde{y}(i) - f(t_i; \hat{K}^i, \hat{\tau}^i),$$

après convergence, l'algorithme donne $\hat{\mathbf{x}}^N = [10.0401, 2.8217]^\top$ ce qui est proche des «vraies valeurs», voir figure 5.7.

Les méthodes de moindres-carrés sont très utilisées en identification puisqu'elles permettent de travailler matriciellement avec des séries de données consécutives et

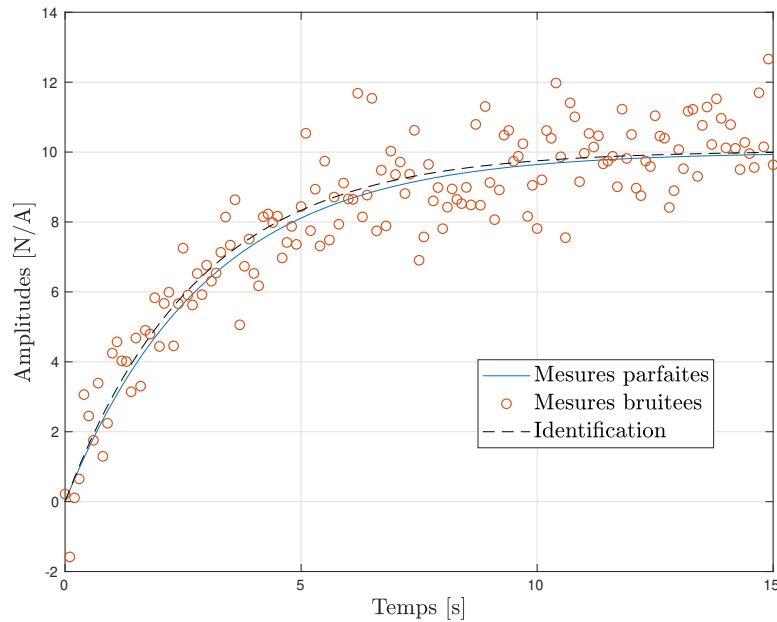


FIGURE 5.7 – Moindres-carrés appliqués pour identifier les paramètres.

permettent d'être robustes aux erreurs de mesures si tant est qu'elles sont non-biaisées. En effet, si la moyenne des erreurs est nulle, un grand nombre de mesures fera chuter l'incertitude de l'estimation. Nous avons illustré le principe sur une courbe assez bruitée mais présentant 150 points de mesure.

Remarque : Nous aurions pu utiliser la fonction `lsqnonlin` de `Matlab` qui utilise la même approche, toutefois le tout était un bon exercice...

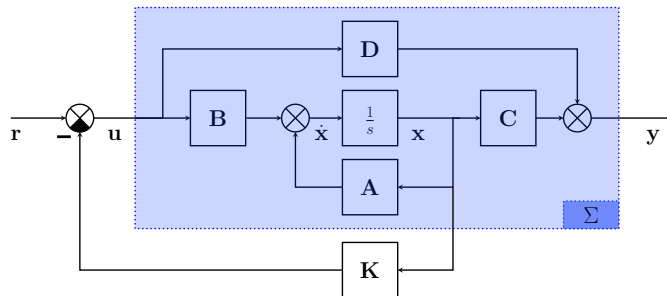
Mesure de la fiabilité de l'identification : on utilise usuellement la métrique Erreur Quadratique Moyenne Normalisée, *Normalized Mean Square Error* (NMSE) qui est définie comme suit :

$$NMSE = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\tilde{y}(i) - f(t_i; \hat{K}, \hat{\tau}) \right)^2}{\sum_{i=1}^N (\tilde{y}(i))^2},$$

afin de déterminer si le modèle est cohérent. Si cette dernière tend vers zéro, cela signifie que le résidu non expliqué (carré de la différence modèle-observation) tend vers zéro et donc que le modèle est fiable.

Partie III

Conception des systèmes asservis



Conception directe dans le plan de Laplace

La conception directe s'effectue à partir d'un paradigme géométrique. On désire modifier la dynamique d'un système en plaçant les **pôles** de ce dernier en créant un compensateur de telle manière à ce qu'ils respectent un **cahier des charges** imposé.

Pour ceci, il faut traduire les critères **transitoires** précédemment vus : **stabilité**, **rapidité**, **oscillations** dans le plan de Laplace. Quant à la **précision** en **régime permanent** elle ne dépend, pour des signaux monômes, que de la **classe du système étudié** ou du choix du gain statique utilisé. En d'autres termes elle n'est visible qu'une fois la convergence obtenue, sous réserve de stabilité.

Ensuite, une fois les critères transitoires établis de manière géométrique dans le plan de Laplace $\mathcal{S}$, nous allons choisir les compensateurs $C(s)$ avec les pôles qui les satisfont dans $\mathcal{S}$ en tenant compte dans la conception de la précision.

I Notions géométriques dans le plan de Laplace

Nous allons construire la **géométrie admissible** pour les pôles par étapes successives. On supposera que nous sommes en présence d'un système d'**ordre deux** dans un premier temps.

I.A Région de stabilité

Nous voulons **pour tous** les cahiers des charges un système *stable*. C'est une condition *sine qua non* : sans stabilité, il est impossible de poursuivre un signal. On sait qu'un système stable est un système tel que ses pôles respectent le critère :

$$\Re(p_i) < 0,$$

ce qui nous donne la zone illustrée à la figure 6.1.

L'axe des imaginaires est exclu, la stabilité BIBO des oscillateurs (pôles du type $p_{1,2} = \pm\alpha j$, $\alpha \in \mathbb{R}$) n'est pas intéressante pour poursuivre un signal. Nous voulons une stabilité **asymptotique** c'est-à-dire un système dont la sortie converge vers une valeur donnée à l'horizon infini.

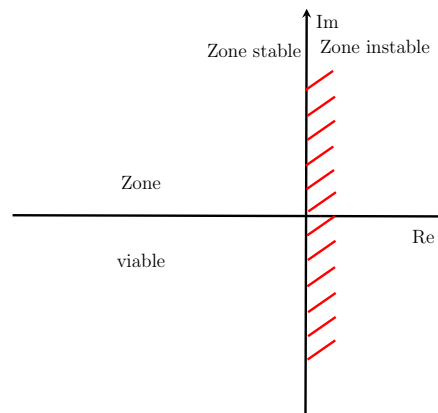


FIGURE 6.1 – Région de stabilité du plan S.



Propriété 6.1 : Symétrie Le plan de Laplace est symétrique selon l'axe des réels. En effet les pôles sont toujours **conjugués complexes** ou **purement réels**.

Démonstration. Ceci vient du fait que tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ n'admet que des **racines doubles conjuguées complexes** et des racines simples **réelles** (conjuguées avec elles-mêmes). En effet, si tel n'était pas le cas les coefficients seraient nécessairement complexes. En effet, pour tout $x \in \mathbb{C}$ on a $xx^* = \Re\{x\}^2 + \Im\{x\}^2 \in \mathbb{R}$, avec x^* conjugué de x . $\square$

I.B Rapidité

a) Paramétrage polaire du plan de Laplace

Propriété 6.2 : Lien entre ξ, ω_0 et le plan de Laplace Soit deux pôles dans le plan de Laplace conjugués complexes $p_1 = p_2^* = -a + jb$. Or, nous avons vu dans le chapitre 2 que :

$$p_{1,2} = \omega_0 \left(-\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2} \right).$$



On peut réécrire de façon polaire l'équation précédente en définissant un angle $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que :

$$\xi = \cos(\theta) \Rightarrow p_{1,2} = \omega_0 (\cos(\theta) \pm j \sin(\theta)),$$

ce qui se visualise sur la figure 6.2.

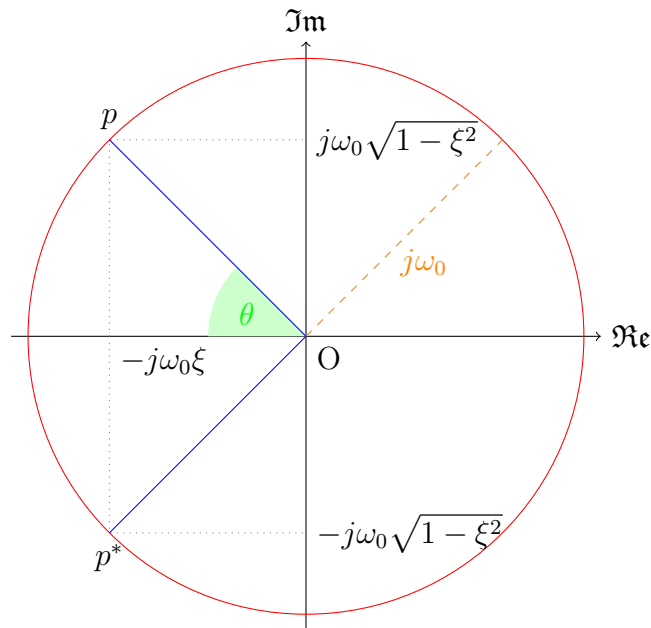


FIGURE 6.2 – Visualisation polaire du plan de Laplace.

b) Marge de rapidité

Ainsi, on a $\Re\{p_i\} = \xi\omega$. Par conséquent et par simple application du critère de rapidité à cinq pour cent de l'équation (4.4) on trouve une zone géométrique délimitée par une droite verticale.

Remarque : Les pôles admissibles en règle générale doivent être **plus rapides** qu'une certaine limite **imposée par le cahier des charges** donc par conséquent, afin de respecter l'inégalité 4.4 ces derniers doivent être à gauche de la droite $\mathcal{D}$ du plan définie par :

$$\forall Z \in \mathbb{C}, Z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \Re\{Z\} = -\frac{3}{T_{r,5\%}}.$$

Visuellement, on peut observer la droite $\mathcal{D}$ en bleu sur la figure 6.3 :

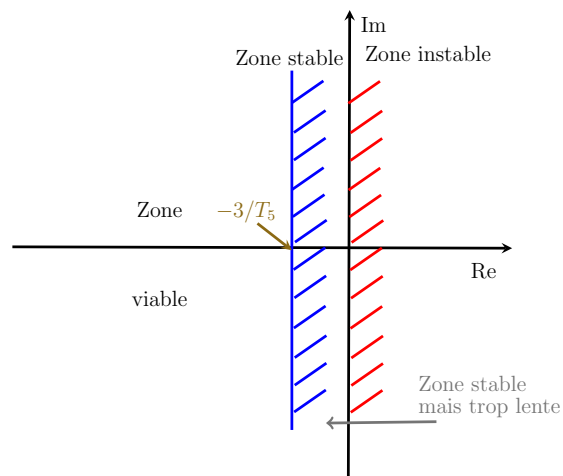


FIGURE 6.3 – Visualisation du critère de rapidité.

On notera le point choisi à $\frac{-3}{T_{r,5\%}}$ qui délimite la rapidité de notre système.

c) Notion de dominance, approximation aux ordres inférieurs

Si un pôle est suffisamment «à gauche», on peut négliger ses effets. En effet, les pôles associés à un temps caractéristique (partie réelle) plus élevé gouvernent la **cinétique globale** du système.

Exemple 6.1 : Réaction chimique Deux réactions chimiques supposées totales entre composés chimiques ont lieu :

$$\begin{cases} A + B \rightarrow C, \\ C + D \rightarrow E. \end{cases}$$

On suppose que la synthèse du procédé C prend une heure, alors qu'en présence de D la synthèse de E prend une milliseconde. Il est évident que nous ferons une hypothèse sur la rapidité en considérant le premier processus comme ayant le **temps déterminant** sur la réaction totale $A+B+D \rightarrow E$, stipulant que la deuxième réaction a un temps négligeable devant la première...

On peut **définir** un critère de dominance :

Propriété 6.3 : Dominance Pour $N \in \mathbb{N}$, $N > 5$ et deux pôles p_1 et p_2 :

$$p_1 \text{ domine } p_2 \Leftrightarrow N|\Re[p_1]| < |\Re[p_2]|.$$

Généralement, on prendra $N = 10$ ou $N = 5$.

Exemple 6.2 : Illustration numérique En pratique, on peut voir les effets comme suit : soient deux premiers ordres cascades, avec pour temps caractéristiques $\tau_2 = 10$ s et $\tau_1 = 100$ s comme suit :

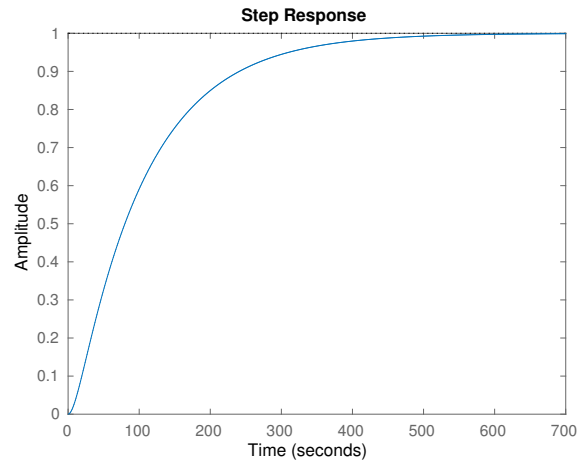
$$F(s) = \frac{1}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} = \frac{K}{(s - p_1)(s - p_2)}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

La réponse du système à un échelon est présentée sur la figure 6.4 .

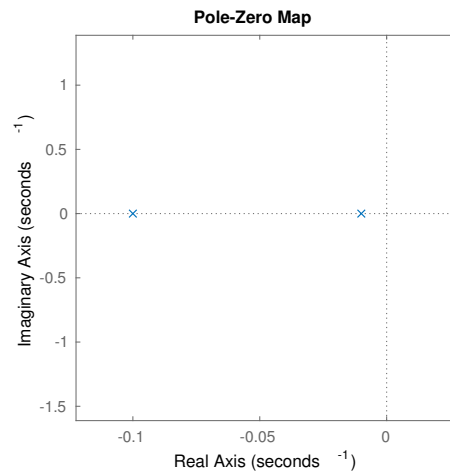
On remarque que la **réponse indicielle** ressemble à celle du premier ordre approché :

$$F'(s) = \frac{1}{1 + \tau_1 s}.$$

Ce qui est prévisible au vu des pôles dans le Plan de Laplace (fig 6.5). Le pôle p_2 est éloigné de l'axe des imaginaires à une distance dix fois plus élevée que p_1 ce qui

FIGURE 6.4 – Réponse indicielle de $F(s)$.

montre avec application du critère pour $N = 10$ que son effet est négligeable. En d'autre termes p_1 domine p_2 .

FIGURE 6.5 – Plan de Laplace avec les pôles de $F(s)$ marqués par des croix.

I.C Marge oscillatoire

Nous avons vu que $\xi = \cos(\theta)$ comme illustré sur la figure 6.2. En sachant que le plan de Laplace est symétrique selon l'axe des réels (sous-section I.A), on peut

aisément extrapoler une marge paramétrée par deux droites polaires passant par l'origine et d'angles $\pm\theta$. Reste à savoir si la région est entre ces droites où à l'extérieur.

Généralement, le **cahier des charges** stipule un pourcentage de premier dépassement $\%OS$ à ne pas excéder. Ainsi, l'amortissement ξ doit être plus élevé que cette borne déterminée par l'application de la formule 4.5.

Or, dans le premier cadran $[0, \pi/2]$ la fonction $\cos$ est décroissante, donc l'angle trouvé par l'application de la formule :

$$\theta_{\text{cahier des charges}} = \cos^{-1}(\xi_{\min}),$$

est un angle maximal et les pôles admissibles doivent vérifier $\theta \in [0, \cos^{-1}(\xi_{\min})]$ (respectivement $-\theta$ pour les pôles conjugués). Ainsi, on peut visualiser cette contrainte **en vert** sur la figure 6.6 :

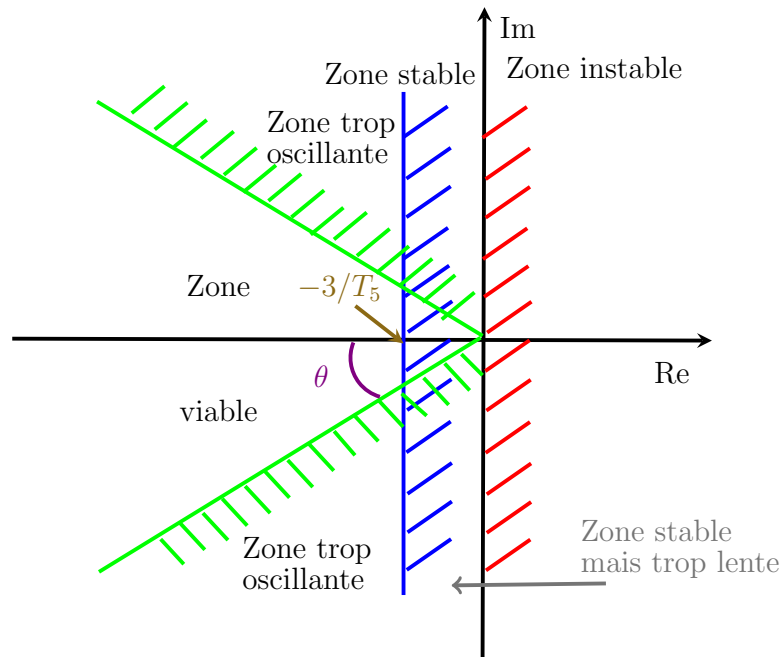


FIGURE 6.6 – Plan de Laplace avec marges de rapidité et d'oscillation.

I.D Cercle d'effort

Il est intéressant pour les concepteurs de rester en-dessous d'une certaine pulsation naturelle ω_0 afin de limiter l'effort de commande $u(t)$ du système.

En effet, plus les pôles d'un système ont une pulsation naturelle forte, plus ce système sera **énergivore**. Le problème peut être encore plus grave que le simple fait de consommer trop d'énergie : on peut également fausser le modèle en **faisant saturer la commande $u(t)$** . Par exemple, demander une trop grande vitesse à un moteur va faire **saturer** le montage qui l'alimente et ainsi provoquer des **non-linéarités** ce qui peut rendre le contrôleur complètement inopérant (perte de stabilité, précision altérée, rapidité dégradée...).

On va donc contraindre le module de p_i de la façon suivante :

$$|p_i| < \omega_0^{\max} \Leftrightarrow p_i \in \mathcal{D}(0, \omega_0^{\max}),$$

les pôles donc doivent appartenir à un disque de rayon ω_0 et centré sur l'origine du plan de Laplace. On visualise cette contrainte **en violet** sur la figure 6.7.

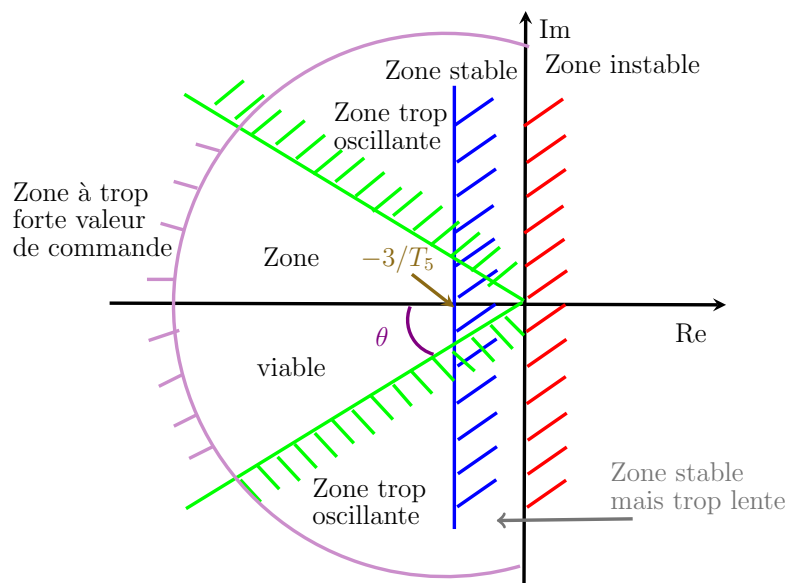


FIGURE 6.7 – Plan de Laplace avec marges de rapidité et d'oscillation et cercle d'effort.

Remarque : Parfois, les régions admissibles peuvent être disjointes, cela signifie que le **cahier des charges** est **impossible à assurer**. Il faut alors revoir les spécifications afin de les rendre atteignables.

I.E Marges de premier pic

Également, nous pouvons définir dans le plan de Laplace une région supplémentaire en fonction du temps de pic d'un système du deuxième ordre.

Supposons un système du deuxième ordre en régime pseudo-périodique comme suit :

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\omega_0^2}{(s - p_1)(s - p_1^*)},$$

avec $p_1^* = \omega_0(\cos \theta + j \sin \theta)$ conjugué de $p_1 = \omega_0(\cos \theta - j \sin \theta)$. On rappelle que $\cos \theta = \xi > 0$ et $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \xi^2} > 0$.

En effet, rappelons nous que dans la démonstration de (4.5), nous avons vu que les pseudo-périodes valaient $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$ ainsi que le temps de pic se produisait à demi-période $t = T_p := T/2$.

Or, on peut remarquer la propriété suivante :

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_0 \sin \theta} = \frac{\pi}{\Im(p_1)}.$$

le temps de premier pic est donc inversement proportionnel à la partie imaginaire du pôle complexe p_1 .

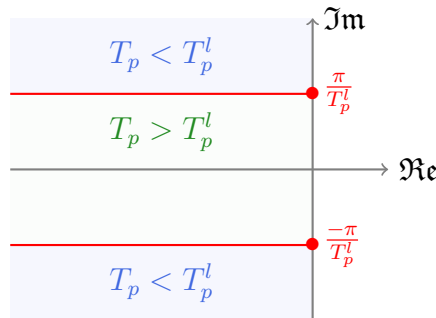


FIGURE 6.8 – Marges de premier pic dans le plan de Laplace.

Ainsi, les **marges de premier pic** sont des demi-droites parallèles à l'axe des réels, paramétrées par une valeur limite, qui est une borne inférieure de T_p^l ou supérieure dépendamment du cahier des charges. Comme on peut le voir à la figure 6.8, si les pôles doivent avoir un temps de pic inférieur à T_p^l alors on choisira la zone extérieure aux marges et respectivement intérieure si on souhaite un temps supérieur à T_p^l .

II Contrôleurs à action simple

Concevoir un compensateur dans le plan de Laplace, c'est comme créer une équation différentielle pour le système avec des coefficients désirés.

Afin de créer une équation différentielle polynomiale à coefficients constants (une fonction de transfert en Laplace) on peut :

- Multiplier des variables par les scalaires ;
- Intégrer des variables ;
- Dériver des variables.

Nous retrouvons donc ces structures élémentaires dans les blocs qui suivent.

II.A Action Proportionnelle

Un contrôleur proportionnel est défini comme suit.

$$C(s) = K_p, \quad K_p \in \mathbb{R}^*,$$

il s'agit de la structure la plus naïve : on multiplie par un gain non-nul l'erreur $\epsilon(s)$ sur le signal désiré $R(s)$.

Fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(s) = \frac{F(s)C(s)}{1 + C(s)F(s)}$$

En supposant que le gain statique du système physique $F(s)$ soit K_0 on obtient, pour un échelon unitaire en consigne (référence) $R(s) = \theta(s)$ et une perturbation

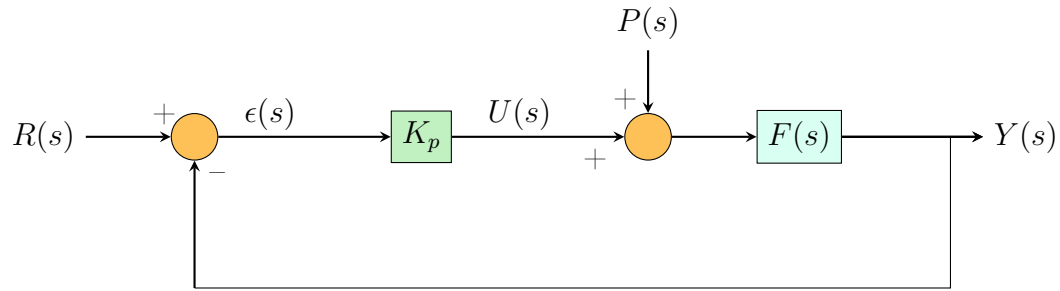


FIGURE 6.9 – Schéma-blocs du contrôleur proportionnel.

nulle $P(s) = 0$:

$$\epsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = \frac{1}{1 + K_0 K_p}$$

De même pour le rejet de perturbation échelon unitaire $P(s) = \theta(s)$ avec une référence nulle $R(s) = 0$ on peut vérifier :

$$\epsilon_r = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{K_0}{1 + K_0 K_p}$$

On remarque que le système devient plus précis lorsqu'on augmente le gain K .

Quelques caractéristiques :

- Lorsqu'on augmente K on augmente la rapidité et la précision, mais la commande $u(t)$ aussi (risque de non-linéarité), de plus on risque d'augmenter l'amplitude des oscillations d'un système et à terme le rendre instable.
- Facile à implémenter.
- Peu robuste aux perturbations et aux références (le contrôleur demeure de classe 0, ce qui peut être un problème si le signal de référence ou de perturbation est d'une classe supérieure à celle du système).

II.B Action Intégrale

Un contrôleur intégral est défini comme suit.

$$C(s) = \frac{K_i}{s}, \quad K_i \in \mathbb{R}^*.$$

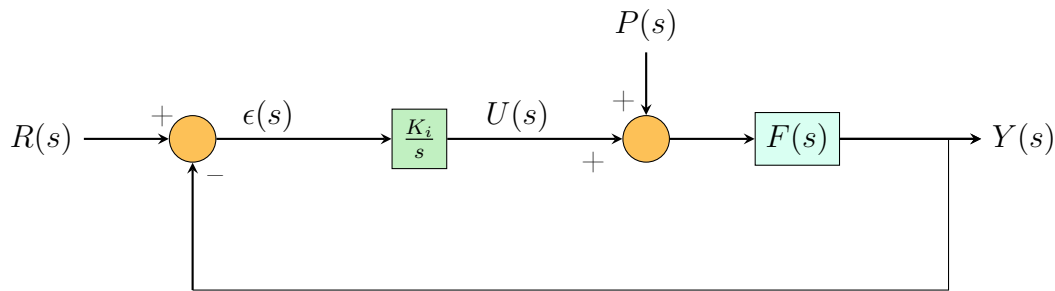


FIGURE 6.10 – Schéma-blocs du contrôleur intégral.

Remarque : Ce contrôleur est utilisé en combinaison avec d'autres contrôleurs, en pratique il n'est pas utilisé seul pour des raisons de stabilité.

En effet, la fonction de transfert $H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{s}$ est celle d'un système instable. Supposons que son entrée $E(s)$ soit un échelon et calculons sa sortie dans le domaine temporel :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} \times \frac{1}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t^2\theta(t),$$

pour $t \in \mathbb{R}^+$, ce qui diverge lorsque $t \rightarrow \infty$.

Quelques caractéristiques :

- Augmente la classe du système et donc la précision. Rappel : un intégrateur est en soi un système de classe 1. Un intégrateur «apprend» des erreurs passées en faisant leur somme continue : $u_i(t) = \int_{\tau=0}^t (y(\tau) - u(\tau)) d\tau$.
- Détérioré la stabilité (on somme une erreur donc on risque l'explosion des termes sommés, voir cours d'intégration).
- Rend le système plus lent (l'intégrale met du temps à converger, «apprentissage des erreurs»).

II.C Action Dérivée

Une fonction de transfert à action dérivée est définie formellement comme suit :

$$C(s) = sK_d \quad K_d \in \mathbb{R}^*.$$



Propriété 6.4 : Non-causalité La dérivation n'est pas causale (fonction de transfert à numérateur d'ordre plus élevé que le dénominateur), on utilisera en pratique un estimateur ne prenant en compte que les points passés, ce qui n'est qu'une approximation.

Remarque : Ce contrôleur n'est **jamais** employé ainsi, dériver un signal bruité peut amener à de trop fortes variations. On préférera l'employer dans des actions combinées (PD, PID). En pratique, on peut l'approximer par un passe-haut afin de contourner le problème de causalité et ne pas être trop tributaire des fluctuations occasionnées par le bruit :

$$C(s) = \frac{s}{1 + \epsilon s}, \quad \epsilon \in]0, 1[.$$

Quelques caractéristiques de l'action dérivée :

- Augmente la stabilité et la rapidité (inclusion des tendances de variation dans la boucle de rétroaction).
- Tributaire du bruit. Dériver augmente le bruit (l'action de dériver est assimilable à un passe-haut à très petite constante de temps).
- Diminue la précision, moins robuste aux perturbations.



Exemple 6.3 : Effets du bruit sur un dérivateur : Supposons que nous ayons un signal constant bruité par un signal sinusoïdal à 1000rad/s d'une faible amplitude :

$$s(t) = 10 + 0.01 \cos(1000t).$$

En dérivant le signal précédent on obtient :

$$\dot{s}(t) = 0.01 \times 1000 \times -\sin(1000t) = -10 \sin(1000t).$$

Nous remarquons que l'action de la dérivée amplifie le bruit haute fréquence. En effet, dans notre exemple, nous obtenons la même amplitude en sortie, malgré la faible amplitude du bruit : le filtre dérivateur est donc un filtre passe-haut qui a donc tendance à amplifier le bruit.

III Actions Combinées

III.A Compensateur Proportionnel-Intégral

On combine les actions proportionnelle et intégrale de la section précédente :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}.$$

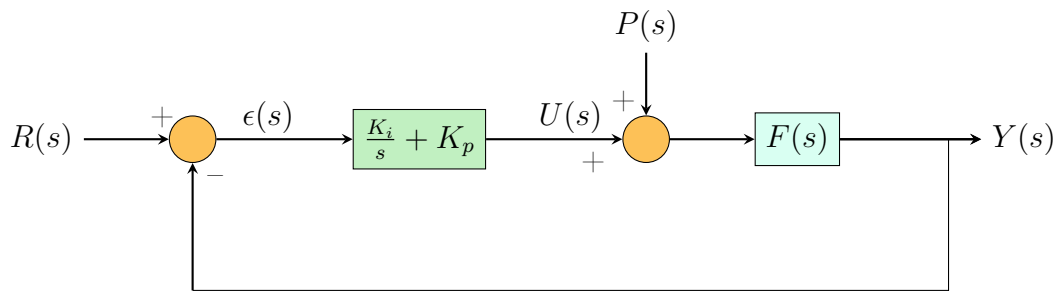


FIGURE 6.11 – Schéma-blocs du contrôleur proportionnel-intégral.

Remarque : Ce correcteur est souvent utilisé pour contrôler des systèmes très stables mais soumis à des perturbations ou des variations de consigne dégradant la précision en boucle ouverte.

Quelques caractéristiques :

- Augmente la classe du système et donc la précision.
- Détérioré un peu moins la stabilité que l'action intégrale selon le réglage, l'action proportionnelle peut servir à éviter des explosions de sommes selon le réglage. Toutefois, ce contrôleur n'est pas indiqué quand le système est instable en boucle ouverte, on préférera le PID.

III.B Compensateur Proportionnel-Dérivé

On combine les actions proportionnelle et dérivée de la section précédente :

$$C(s) = K_p + K_d s.$$

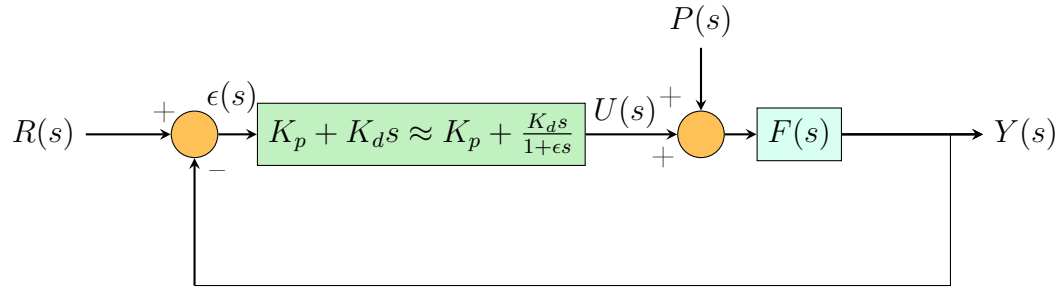


FIGURE 6.12 – Schéma-blocs du contrôleur proportionnel-dérivé.

Remarque : Ce contrôleur est souvent utilisé pour contrôler des systèmes peu sujets à des perturbations (dont le modèle est très fiable) et instables.

Quelques caractéristiques :

- Détérioré la robustesse aux perturbations. En effet, l'usage de la dérivée dans la conception est anticipatif, si le modèle varie, alors cet usage devient erratique.
- Améliore la stabilité et la rapidité, grâce à l'action anticipatrice de la dérivée.
- Est implémentable, contrairement à l'action dérivée seule, toutefois la dérivée n'est obtenue en pratique qu'à l'aide d'un filtre passe-haut.

III.C Compensateur Proportionnel-Intégral-Dérivé

Sans aucun doute la structure la plus couramment utilisée dans l'industrie, le PID combine les trois actions différentielles, sa structure est la suivante :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s.$$

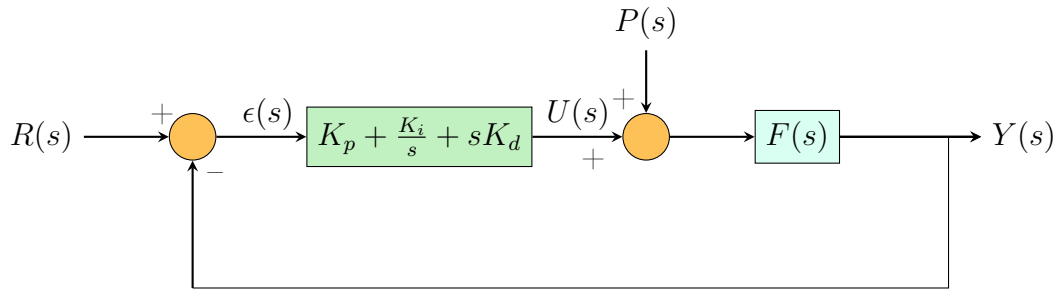


FIGURE 6.13 – Schéma-blocs du contrôleur proportionnel-intégral-dérivé.

Remarque : Ce contrôleur est sans doute le plus connu et utilisé en automatique car facile à mettre en œuvre (faisable avec des composants analogiques comme discrétisable pour une application utilisant un microprocesseur). De plus, il combine toutes les actions, ce qui peut être plus difficile à régler. Nonobstant, cela peut conférer des meilleures performances pour le système en boucle fermée.

Quelques caractéristiques :

- Reprendre les deux contrôleurs précédents et combiner les actions peut aider le lecteur : l'influence des paramètres est la même mais ce dernier doit garder en esprit que le compromis est plus difficile à trouver puisque trois paramètres sont présents maintenant.
- Le système voit sa classe augmenter de 1 (intégrateur).
- L'avantage de ce contrôleur est celui de pouvoir placer deux pôles dominants à la manière d'un second ordre dans bien des cas (méthode directe ou méthode par le lieu des racines d'Evans).

Nous montrerons un exemple de conception pour un système ultérieurement.

III.D Compensateur Proportionnel-Intégral-Dérivé *Feedforward*

Sachant la séquence de consigne $r(t)$ que l'on veut imposer à un système donné, on peut utiliser cette dernière afin de nous donner un degré de liberté supplémentaire

dans le placement des pôles : on rajoute un gain de *feedforward* au montage précédent. Cette structure est appelée également **commande anticipative**.

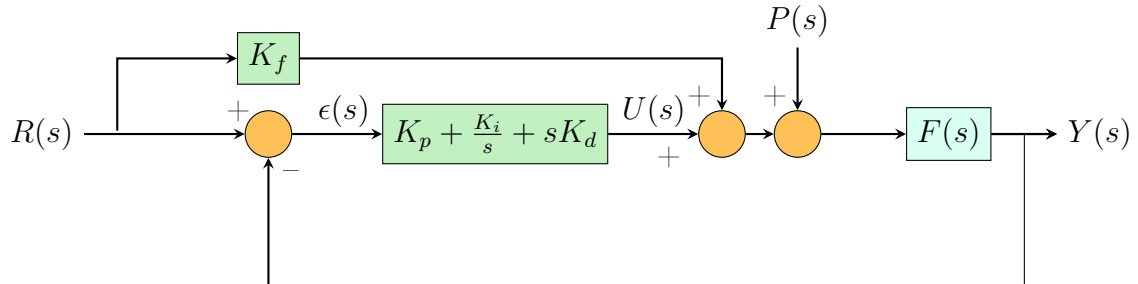


FIGURE 6.14 – Schéma-blocs du contrôleur proportionnel-intégral-dérivé et *feedforward*.

On a donc l'équation globale du système qui suit :

$$Y(s) = \left[R(s)K_f + P(s) + \epsilon(s) \left(K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d \right) \right] F(s).$$

Les fonctions de transfert en régulation et poursuite sont calculables à partir de cette expression et leurs performances dynamiques (pôles) comme statiques (erreurs en régime permanent) sont réglables à partir de ces dernières.

IV Placement des pôles avec les contrôleurs

On a vu précédemment où placer les pôles pour respecter un cahier des charges. Le but d'effectuer un placement de pôles dans les régions définies par le cahier des charges en utilisant un contrôleur donné.

IV.A Placement par calcul direct

On peut souvent identifier le dénominateur d'une fonction de transfert en boucle fermée (avec les gains des compensateurs) avec les pôles désirés. On va prendre un exemple :



Exemple 6.4 : Correction PI pour l'asservissement d'un moteur, modèle du premier ordre

Nous alors pour cela concevoir un contrôleur proportionnel-intégral afin de réguler au mieux toutes les perturbations modélisées par l'entrée du signal $P(s)$, la référence que l'on cherche à poursuivre étant $R(s)$ et la sortie étant $Y(s)$.

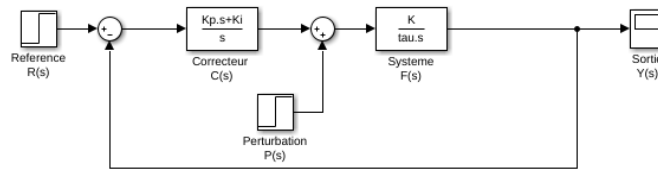


FIGURE 6.15 – Asservissement PI proposé.

Fonction de transfert du système global en boucle fermée :

$$H(s) = \frac{F(s)C(s)}{1 + F(s)C(s)} = \frac{\frac{K}{\tau s + 1} \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right)}{1 + \frac{K}{\tau s + 1} \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right)}$$

On suppose connaître les constantes du système $F(s)$ (le moteur) K et τ . On prendra les valeurs numériques $K = 40$ et $\tau = 0.3$.

Quels pôles choisir ? On cherchera donc à placer des pôles en boucle fermée en appliquant la méthode résumée à la figure 6.7. On va tenter de concevoir en boucle fermée un deuxième ordre approché qui aurait deux pôles dominants tels que (cahier des charges) :

$$P_{OS} \leq 5 \Leftrightarrow \xi \geq 0.69.$$

On choisit $\xi = 0.707 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\theta)$ qui a le bon goût de respecter l'inéquation précédente et qui correspond à un angle de $\theta = 45^\circ$ et qui de plus impose que les **parties réelles et imaginaires des pôles sont égales**. Voyons la contrainte de rapidité maintenant :

$$T_{5\%} \leq 0.5s \Leftrightarrow \frac{3}{\omega_0 \xi} \leq 0.5$$

Or, $-\Re(P_i) = \xi\omega$ par définition, voir la figure 6.2. On va se placer à la limite de cette frontière, définie par l'équation (4.5), car rappelons-nous le, créer des pôles rapides peut faire saturer la commande ce que l'on doit à tout prix éviter. On a donc :

$$\Re(p_i) = -3/0.5 = -6,$$

on va donc chercher à placer les deux pôles en boucle fermée tels que :

$$p_1 = -6 + 6j \quad p_2 = -6 - 6j.$$

Calcul des gains du contrôleur : On connaît K et τ on peut donc écrire les relations suivantes :

$$H(s) = \frac{KK_p(s + \frac{K_i}{K_p})}{s^2 + \frac{1+KK_p}{\tau}s + \frac{KK_i}{\tau}}, \quad (6.1)$$

mais, grâce aux développements précédents on connaît les pôles que l'on veut, le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée doit être égal à :

$$D(s) = (s - p_1)(s - p_2) = (s + 6 + 6j)(s + 6 - 6j) = s^2 + 12s + 72.$$

Nous avons donc deux équations et deux inconnues en identifiant les coefficients au dénominateur... ceci est donc résolvable.

$$D(s) = s^2 + \frac{1 + KK_p}{\tau}s + \frac{KK_i}{\tau},$$

on fait l'identification en prenant les valeurs suivantes :

$$12 = \frac{1 + KK_p}{\tau} \Leftrightarrow K_p = \frac{12\tau - 1}{K} \approx 0.065,$$

$$72 = \frac{KK_i}{\tau} \Leftrightarrow K_i = \frac{72\tau}{K} \approx 0.54,$$

par ailleurs, **un zéro** est introduit en $z_1 = -K_i/K_p \approx -8.3$, ce qui perturbe le régime transitoire du système. Il faut faire attention à ce que des zéros n'interfèrent pas dans la dynamique des systèmes asservis. Nous voyons en outre à la figure 6.16 que bien que la spécification du temps de réponse soit respecté $T_{5\%} \approx 0.5s$ ce n'est pas le cas pour le dépassement $\%OS \approx 11\%$!

Nous pouvons remédier à ce dernier problème en modifiant la structure du compensateur afin de placer un pôle qui annule le zéro introduit. Autre alternative qui fonctionne dans ce cas : utiliser simplement un intégrateur.

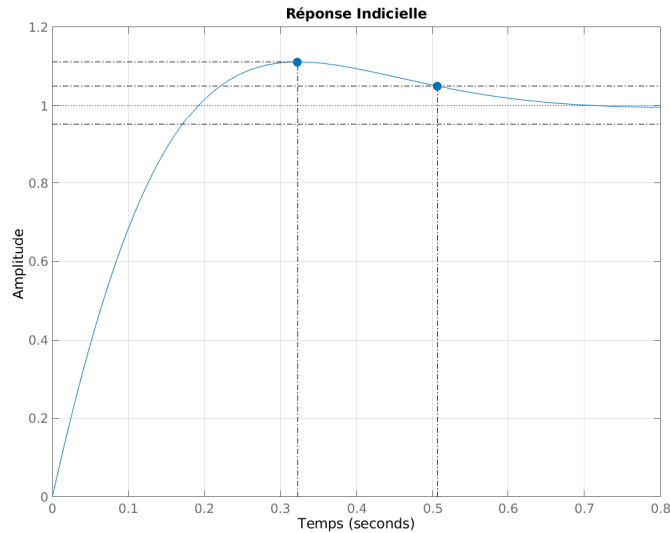


FIGURE 6.16 – Réponse à l'échelon du système asservi.

IV.B Lieu des racines d'Evans

Le Lieu des racines, appelé aussi lieu d'Evans, consiste à tracer l'évolution des **racines du dénominateur** (comprendre les pôles) d'une fonction complexe dans le plan de Laplace en fonction **d'un** gain variable K .

a) Méthode de tracé manuelle



Propriété 6.5 : Symétrie Le tracé du lieu est symétrique selon l'axe des réels (ce sont des pôles complexes).

Soit une fonction de transfert sous la forme :

$$H(s) = \frac{A(s)}{1 + KA(s)B(s)} \text{ on posera } G(s) = A(s)B(s).$$

On veut tracer la courbe que décrivent les pôles de $H(s)$ lorsque K varie dans $\mathbb{R}^+$. Ceci revient à trouver la courbe paramétrée par :

$$KG(s) + 1 = 0 \Leftrightarrow KG(s) = -1,$$

on peut donc extraire les zéros et les pôles de $G(s)$ ainsi que leurs nombres N_z et N_p :

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^{N_z} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{N_p} (s - p_j)}.$$

Nous pouvons donc déterminer le nombre d'asymptotes possibles comme étant :

$$\text{Nombre d'asymptotes} = \Lambda = N_p - N_z,$$

le centroïde du lieu (endroit où se croisent les asymptotes) est donné par :

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{\Lambda},$$

les angles des asymptotes partant de la centroïde sont :

$$\phi_l = \frac{\pi + (l-1)2\pi}{\Lambda} \text{ avec } l \in [1, \Lambda],$$

les points de séparation (endroit où les tracés se séparent) sont parmi les solutions de :

$$\frac{dG(s)}{ds} = 0.$$



Propriété 6.6 : Zéros à l'infini Les asymptotes sont en fait considérées comme représentant les directions asymptotiques des zéros à l'infini. Le nombre de zéros fini et infini doit toujours évaluer le nombre de pôles.



Propriété 6.7 : Existence du lieu sur l'axe des réels Sur l'axe des réels, le lieu existe (entre un zéro et un pôle sur l'axe des réels) si on laisse un nombre impair de pôles sur la droite.



Propriété 6.8 : Sens du lieu Les racines vont des pôles en boucle ouverte p_i aux zéros en boucle ouverte z_i . La boucle ouverte étant représentée par la fonction de transfert $G(s)$ ici.

Angles de départ et d'arrivée du lieu : nous pouvons de plus calculer ces angles en appliquant les formules qui suivent.

Le lieu *quitte* un pôle non-réel p_k de multiplicité 1, avec un angle donnée par :

$$\theta_{d,k} = \sum_{i=1}^m \arg(p_k - z_i) - \sum_{i=1, i \neq k}^n \arg(p_k - p_i) + \pi \quad [2\pi].$$

Le lieu *arrive* sur un zéro non-réel z_k de multiplicité 1, avec un angle donnée par :

$$\theta_{a,k} = \sum_{i=1}^n \arg(z_k - p_i) - \sum_{i=1, i \neq k}^m \arg(z_k - z_i) + \pi \quad [2\pi],$$

cependant, les tracés demandés dans les exemples et les exercices ne requièrent que rarement ces deux formules.

b) Exemple de tracé



Exemple 6.5 : Ordre deux Pour la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{1 + s}{K + (1 + s)(2 + s)},$$

tracer le lieu des racines d'Evans en fonction de K .

Tout d'abord identifions $G(s)$, clairement $G(s) = \frac{1}{(1+s)(2+s)}$, trouvons le lieu des solutions de $KG(s) = -1$.

$G(s)$ admet deux pôles, -1 et -2 mais aucun zéro, il y a donc $\Lambda = 2$ asymptotes. Le centroïde est donné par :

$$\sigma = \frac{-1 - 2}{2} = -\frac{3}{2},$$

les angles des asymptotes sont $\phi_1 = \pi/2$ et $\phi_2 = -\pi/2$, symétrie oblige.

Existe-il un point de séparation ?

$$\frac{dG(s)}{ds} = -\frac{2s + 3}{s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4} = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{3}{2}.$$

oui c'est σ . Les deux branches asymptotiques du lieu partent de σ et les tracés coïncident en ce point (deux asymptotes qui se croisent n'implique pas nécessairement que les tracés se croisent!).

Quid de l'existence du lieu sur l'axe des réels ? Lorsque $\Re\{s\} < -2$ et $\Re\{s\} > -1$, le nombre de pôle à droite est 2 et respectivement 0, ce qui est pair : il n'existe pas. Pour $-2 < \Re\{s\} < -1$ le lieu existe sur l'axe des réels.

On a donc un lieu à **deux branches**, une part de chaque pôle en boucle ouverte, elles se rencontrent en $\sigma = -3/2$ et empruntent chacune une asymptote avant de s'éloigner de l'axe des réels symétriquement sur ces dernières.

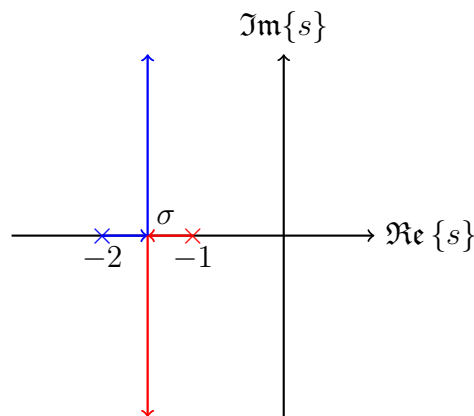


FIGURE 6.17 – Lieu des racines étudié.

Remarque : On peut utiliser la fonction `rlocus()` de Matlab afin d'arriver au résultat. On entre la fonction $G(s)$ et on obtient le tracé des pôles de $\frac{G(s)}{1+KG(s)}$ avec K balayant $\mathbb{R}^+$ (boucle refermée avec un retour proportionnel K).

c) Superposition avec les régions admissibles

Le but du tracé du lieu d'Evans est évidemment de savoir comment les pôles évoluent en fonction d'un gain. Si on le superpose au lieu des pôles admissibles de la figure 6.7, alors on est en mesure de choisir le gain adéquat pour la conception de notre contrôleur. Il faut choisir un gain où tous les pôles appartiennent aux régions admissibles répondant aux spécifications transitoires du [cahier des charges](#).



Exemple 6.6 : Réglage d'un gain proportionnel Soit le système suivant :

$$F(s) = \frac{1}{s(s+5)},$$

est-il possible de l'asservir à l'aide d'un bouclage proportionnel (supposé unitaire) tel que son dépassement soit inférieur à dix pour cent tout en poursuivant parfaitement un échelon ?

Le correcteur dans ce cas vaut $C(s) = K$ avec K supposé une constante à déterminer.

Étude de stabilité : Le système est instable en boucle ouverte. Qu'en est-il en boucle fermée ? Calculons la fonction en boucle fermée :

$$H(s) = \frac{C(s)F(s)}{1 + C(s)F(s)} = \frac{K}{s^2 + 5s + K}, \quad (6.2)$$

le dénominateur est un polynôme d'ordre deux, le critère de Routh spécifique s'applique. Le système n'est stable que si les coefficients du polynôme d'ordre deux sont du même signe :

$$\text{Système stable} \Leftrightarrow K > 0.$$

Précision : On remarque que le correcteur est de type zéro et que le correcteur est de type un : le système en boucle ouverte est de type un. La poursuite est parfaite car le déficit de classe est nul. En effet, pour un échelon de référence d'amplitude unitaire, la valeur finale du signal de sortie vaut :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sR(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \frac{1}{s} \frac{K}{s^2 + 5s + K} = 1,$$

c'est-à-dire exactement la valeur que l'on recherche (échelon unitaire).

Lieu des racines : La fonction de transfert $G(s)$ vaut :

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s} = \frac{1}{s(1+5)},$$

son étude montre que :

- Les pôles sont -5 et 0 : le lieu n'existe qu'entre eux sur l'axe réel. Le centroïde est situé en $\sigma = -5/2$.
- Aucun zéro n'est à déplorer, il existe deux branches infinies. Et $\phi_1 = \pi/2$ comme $\phi_2 = -\pi/2$.
- Le point de séparation est sur le centroïde :

$$\frac{dG(s)}{ds} = -\frac{2s+5}{s^2(s^2+10s+25)} = 0 \Leftrightarrow s = -5/2.$$

Le lieu des racines est donc celui de la figure 6.18.

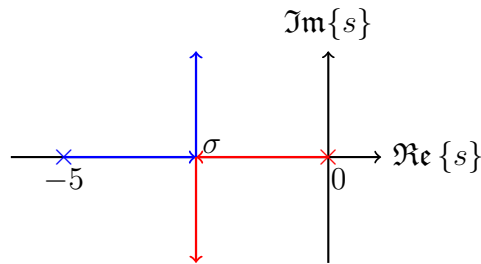


FIGURE 6.18 – Lieu des racines étudié.

Région admissible : on demande un pourcentage de dépassement inférieur à dix.

Calculons ξ grâce à l'équation (4.5), cela nous donne $\xi = 0.59$ ce qui permet de calculer $\theta = \arccos \xi = 0.94 \text{ rad} = 54^\circ$.

Pour construire géométriquement la région admissible, calculons l'abscisse de la droite supérieure de la marge oscillatoire en $\Re\{\sigma\}$. La trigonométrie nous donne le point : $A = (\Re\{\sigma\}, \tan(\theta)\Re\{\sigma\}) = (-2.5, -3.4)$ pour construire notre région admissible.

Le réglage est donc possible d'après la figure 6.19 qui montre la superposition de la marge oscillatoire et du lieu des racines. Pour rester dans les dix pour cent de premier dépassement il ne faut pas augmenter le gain de manière trop conséquente : on se doit de rester dans la zone délimitée par les deux demi-droites.

Le lieu des racines nous apprend qu'un faible gain aura tendance à créer un système lent avec un comportement proche d'un ordre un. En effet, les pôles sont

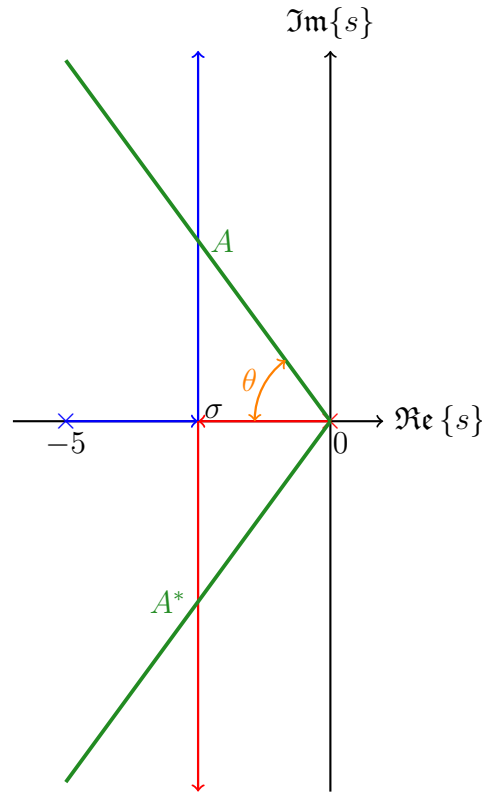


FIGURE 6.19 – Superposition du lieu des racines et de la région admissible.

tout d'abord réels et le pôle rouge partant de zéro domine le pôle bleu lorsque le gain est faible. Pour des gains plus élevés, le système deviendra un ordre deux pseudo-périodique avec deux pôles complexes conjugués.

Le lieu des racines est donc un outil puissant qualitatif qui permet la conception de systèmes asservis lorsqu'on fait varier les gains de manière monovariante. Il permet de prévoir les performances transitoires lorsqu'on connaît le lien entre la géométrie du plan de Laplace et l'équation caractéristique des [EDLC](#).



Matlab implémente en plus de la fonction `rlocus` qui permet de visualiser un lieu des racines l'outil `rltool` (aussi appelée `SISOtool`) qui permet de concevoir les compensateurs en éditant graphiquement les lieux des racines.

Toutefois, dans le cadre du cours **ELE3201**, l'approche directe par calcul littéral est préférée pour le placement. Cependant, l'interprétation et le tracé des cas simple des lieux des racines sont primordiales à maîtriser car il s'agit d'un outil de conception puissant et très répandu.

Commande fréquentielle

Les méthodes de conception de systèmes asservis utilisant les outils fréquentiels sont très courantes dans le monde de l'industrie. Parfois, les systèmes sont assez complexes et il est plus aisé de déterminer une réponse fréquentielle de ces derniers que de chercher à identifier une fonction de transfert précise. Ces méthodes, se basant sur des critères expérimentaux ne nécessitant que peu de calculs analytiques virent leur essor dans les années où l'ordinateur n'était pas encore un outil répandu comme aujourd'hui... Cependant, cette façon de concevoir repose sur des approximations et peut se révéler sous-optimale dans maints cas.

I Notions fondamentales

Cette section présente quelques notions fondamentales utiles pour l'**analyse harmonique** des systèmes. On peut parler également d'**analyse spectrale** ou encore d'**analyse fréquentielle**, qui sont des synonymes courants dans la littérature. Cette section est plus une justification des outils que nous introduirons par la suite plutôt qu'une preuve formelle de leur utilité dans la conception fréquentielle. Nous voulons donner au lecteur une idée de l'état d'esprit mathématique dans lequel ont été conçus les outils propres aux automaticiens plutôt que d'exposer des justifications rigoureuses.

I.A Gain et phase relative

Soient deux signaux sinusoïdaux de même fréquence x_e et x_s dépendant du temps et tels que :

$$x_e = A_e \sin(\omega t + \phi_e), \quad x_s = A_s \sin(\omega t + \phi_s).$$

Par définition :

- $A_{e,s}$ sont les amplitudes (non-nulles et supposées positives¹) de ces signaux.
- $\phi_{e,s}$ sont les phases (réelles et quelconques) desdits signaux.

Ce formalisme est intéressant puisque l'on peut définir aisément une [transformation](#) du signal x_e au signal x_s qui consiste à :

- Appliquer un facteur d'échelle (le gain K) afin d'obtenir $A_s = K A_e$

$$K := \frac{A_s}{A_e};$$

- Appliquer une translation temporelle (différence de phase afin d'obtenir le signal x_s en partant de Kx_e .) Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad Kx_e(t) = x_s(t) \Leftrightarrow A_e \frac{A_s}{A_e} \sin(\omega t + \phi_e) - A_s \sin(\omega t + \phi_s) = 0;$$

En raisonnant sur arguments 2π -périodiques on peut réécrire l'égalité comme :

$$\omega t + \phi_e = \omega t + \phi_s [2\pi] \Leftrightarrow \phi_s - \phi_e = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

La transformée revient à ajouter la phase $\Phi := \phi_s - \phi_e$ au signal Kx_s afin d'obtenir le signal x_s .

On vient juste de montrer que pour chaque sinusoïde, il existait deux quantités permettant de passer de cette dernière à une sinusoïde de même fréquence.

1. Il suffit de faire en sorte que la phase vaille 180° de plus afin de voir apparaître un moins. Voir les formules de trigonométrie. Le cas à amplitude nulle ne nous intéresse évidemment pas ici...

I.B Filtre linéaire

Un filtre linéaire $\mathfrak{F}$ est une entité munie d'une fonction de transfert $F(j\omega)$ dépendant d'une pulsation fréquentielle en particulier. On peut le définir comme une fraction polynomiale dépendant de la quantité $j\omega$:

$$F(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i [j\omega]^i}{\sum_{k=1}^M b_k [j\omega]^k},$$

Avec :

- $j \in \mathbb{C}$ nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$.
- $a_i, b_k \in \mathbb{R}$ coefficients constants réels des polynômes.
- $N, M \in \mathbb{N}$ ordre entier des polynômes. On devra respecter $N < M$ pour des raisons de causalité. Comme pour les fonctions de transfert classiques.

La théorie des **transformées de Fourier** nous apprend que nous pouvons décomposer sous de faibles hypothèses (qui sont respectées en automatique linéaire) toute fonction temporelle en une somme de fonctions sinusoïdales. Le cas sinusoïdal est donc généralisable pour l'analyse des signaux. Si l'on décompose une fonction temporelle et causale en transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}(f(t)|t \in \mathbb{R}^+)(\omega) = F(\omega) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-2\pi j\omega} f(t) dt \in \mathbb{C}.$$

La transformée de Fourier est donc **une quantité complexe** et elle présente des propriétés analogues avec la transformée de Laplace² telle que sa **linéarité**. Nous n'entrerons pas dans les détails mathématiques de cette dernière.

Nous avons l'identité suivante pour toute exponentielle complexe :

$$\exp(-j2\pi\omega t) = \cos(2\pi\omega t) - j \sin(2\pi\omega t).$$

Cette dernière signifie qu'utiliser la transformée de Fourier revient à sommer des fonctions sinusoïdales et que nous pouvons utiliser nos considérations prises à la section I.A. De plus, on remarque aisément que la transformée de Laplace est une généralisation de la transformée de Fourier, et que si on fait le changement de variable suivant :

2. En fait il s'agit d'un cas particulier de cette transformée.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t)|t \in \mathbb{R}^+)(\omega) &= F(\omega) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-2\pi j\omega} f(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt|_{s=j2\pi\omega} = \mathcal{L}(f(t)|t \in \mathbb{R}^+)|_{s=j2\pi\omega}\end{aligned}$$

On obtient donc un lien entre les deux. On procédera en utilisant **ce changement de variable** durant tout le chapitre traitant de la commande fréquentielle.

Remarque : Maintenant que nous avons vu sommairement que l'on peut transformer tout signal temporel en une somme continue ($\int$) de signaux sinusoïdaux. De plus, nous avons mis en évidence le fait que la transformation d'un signal par un filtre linéaire pouvait se résumer en deux quantités réelles (phase et gain). Nous sommes donc en droit d'introduire les outils utilisant ces deux notions en automatique.

II Outils d'analyse

Dans le reste du chapitre, le changement $F(s)|_{s=j\omega} = F(\omega)$ pour toute fonction de transfert F est appliqué.

II.A Diagrammes de Bode

Les diagrammes de Bode sont au nombre de deux. Il s'agit des deux tracés de **module** et de **phase** de la **fonction de transfert** en fonction de la pulsation ω et en échelle logarithmique. Ils permettent de résumer une bonne partie du comportement d'une fonction de transfert en s'appuyant sur sa **réponse fréquentielle** à un signal sinusoïdal. Cet outil est la brique élémentaire de l'analyse des réponses fréquentielles des systèmes linéaires : nos autres considérations vont toujours s'appuyer sur les diagrammes de Bode dans la suite de ce chapitre.

a) Diagramme de Bode en amplitude

Le **diagramme de Bode en amplitude** d'une fonction de transfert $F(j\omega)$ peut ainsi se définir :

$$\mathcal{B}_a(F) : \{x = \omega \text{ (log)} \mid y = 20 \log(|F(\omega)|) = 20 \log(\sqrt{(\Im\{F(\omega)\})^2 + (\Re\{F(\omega)\})^2})\}$$

Remarque : La fonction logarithme log est dans tout ce chapitre le **logarithme décimal** vérifiant $\log(10) = 1$.

Décomposition du tracé : En pratique, on sait que les fonctions de transfert sont en fait des fractions polynomiales. Or, chaque polynôme comporte des racines symétriques dans le plan de Laplace $\mathcal{S}$. Trouvons donc une approche décomposant en sous-tracés afin de simplifier le calcul. On peut donc écrire la fonction de transfert $F(\omega)$ comme suit :

$$F(\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^N (j\omega - z_i)^\alpha}{\prod_{k=1}^M (j\omega - p_k)^\beta}$$

Avec $N < M$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, multiplicité des racines (pôles ou zéros). Et $K \in \mathbb{R}$ est le gain statique du système. Par propriété du logarithme et du module des nombres complexes³ on aura donc en ordonnée du diagramme de Bode en gain :

$$\begin{aligned} y(\omega) &= 20 \log(|F(\omega)|) = 20 \log \left(\left| K \frac{\prod_{i=1}^N (j\omega - z_i)^\alpha}{\prod_{k=1}^M (j\omega - p_k)^\beta} \right| \right) \\ &= 20 \log(K) + \sum_{i=1}^N 20\alpha_i \log(|j\omega - z_i|) - \sum_{k=1}^M 20\beta_i \log(|j\omega - p_k|). \end{aligned} \quad (7.1)$$

En clair, pour toute fonction de transfert, on peut **superposer** les diagrammes de Bode élémentaires composés par chacun des zéros et pôles en les sommant (respectivement en les soustrayant). Il ne faut pas omettre la composante constante provenant du gain statique dans l'opération. Ces considérations seront très utiles pour le tracé en pratique.

3. Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes si $a, b \in \mathbb{R}$ alors $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. Le module du produit est égal au produit des modules : si $a, b \in \mathbb{C}$ alors $|ab| = |a||b|$.

b) Diagramme de Bode en phase

Le diagramme de Bode en phase de $F(j\omega)$ est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{B}_a(F) : \{x = \omega \text{ (log)} \mid y = \arg(F(j\omega)) = \varphi_F(j\omega)\}$$

En clair, il s'agit du tracé de l'évolution de la phase d'une fonction de transfert (argument de la fraction rationnelle qui la compose) suivant les fréquences données en logarithme. Rappelons-nous des propriétés des arguments de produits et de quotients, qui donnent la formule de décomposition suivante :

$$y(\omega) = \varphi_F(j\omega) = \arg \left(K \frac{\prod_{i=1}^N (j\omega - z_i)^{\alpha_i}}{\prod_{k=1}^M (j\omega - p_k)^{\beta_k}} \right) \quad (7.2)$$

$$= \underbrace{\arg(K)}_{=0} + \sum_{i=1}^N \alpha_i \arg(j\omega - z_i) - \sum_{k=1}^M \beta_k \arg(j\omega - p_k). \quad (7.3)$$

Nous rappelons que l'argument d'un réel positif, comme K est nul. Les monômes restants sont séparables en partie réelle et imaginaire de manière aisée. Pour calculer les arguments il suffit d'appliquer les règles classiques présentées dans la section II.B.

c) Comportement asymptotique et tracé approché

Comme chaque diagramme de Bode est décomposable en une superposition de diagrammes élémentaires d'ordre un. On va donc, étudier une fonction de transfert d'ordre un, à un pôle (pour un diagramme d'une fonction de transfert à un zéro, il suffira de multiplier les valeurs en ordonnée par -1) sans perte de généralité :

$$F(s) = \frac{K}{1 + \tau s} \underset{s=j\omega}{=} \frac{K_s}{1 + j\tau\omega}.$$

On peut y identifier un unique pôle $p = -\frac{1}{\tau}$ et on introduira la **pulsation propre** comme étant la quantité $\omega_0 = \tau^{-1}$. On peut donc introduire une fonction de transfert à gain unitaire comme suit :

$$F(\omega) = K F_1(\omega) = K \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0} + 1}.$$

Influence du gain statique : Le gain statique $K \in \mathbb{R}^+$ n'a d'influence que sur le gain et non sur la phase (voir sous-section précédente), on ajoutera donc la valeur :

$$G_{\text{statique}} = 20 \log K,$$

sur l'ensemble de diagramme de gain de F_1 pour obtenir celui de F puisque ce gain est indépendant de la fréquence.

Gain de F_1 : La fonction donnant le gain en décibels de la fonction de transfert est donnée (calcul de module de nombres complexes) ci-dessous :

$$G_{F_1, dB}(\omega) = -20 \log \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right),$$

on pourra donc étudier les cas limites :

i Cas $\omega \rightarrow 0$: si on annule ω la valeur sous la racine sera 1, ce qui implique que le gain est nul car $\log(1) = 0$.

ii $\omega \rightarrow \omega_0$:

$$G_{F_1, dB}(\omega_0) = -20 \log(\sqrt{2}) \approx -3.0103 \text{ dB} \approx -3 \text{ dB}$$

Remarque : Dans la littérature on parlera de pulsation de coupure à -3dB ce qui est une autre appellation pour ω_0 .

iii Cas $\omega \rightarrow \infty$, tout d'abord, si la pulsation devient grande, on peut supposer que le un devient négligeable devant le rapport ω/ω_0 devant 1 et par conséquent on peut dériver une branche infinie oblique comme suit :

$$G_{F_1, dB}(\omega \rightarrow \infty) \approx 20 \log \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) = 20 \log(\omega) \underbrace{-20 \log(\omega_0)}_{\text{négligeable}}.$$

La précédente valeur peut être vue comme une droite décroissante de pente -20 décibels par décade en échelle logarithmique.

Nous pouvons résumer nos approximations et nos vraies valeurs pour un système normalisé de pulsation de coupure unitaire générique à la figure 7.1.

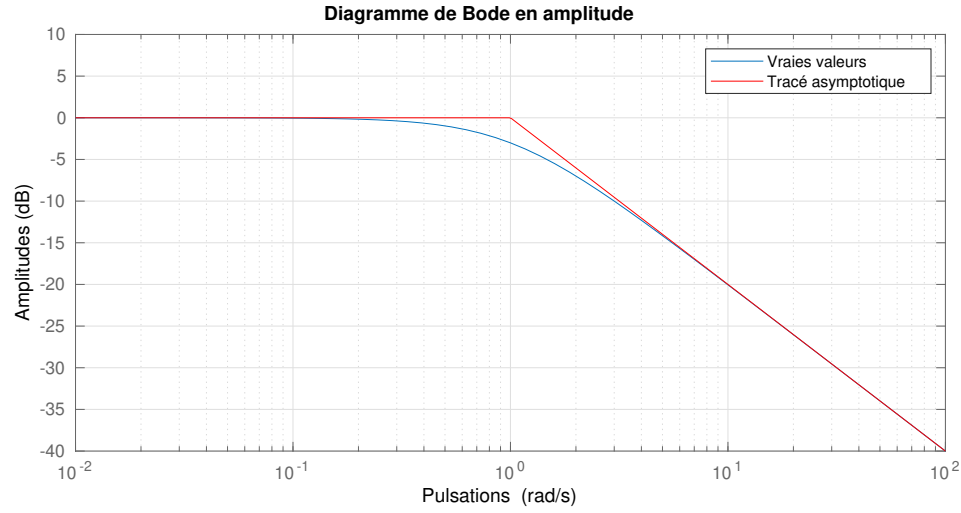


FIGURE 7.1 – Diagrammes de Bode approchés et analytiques en amplitude pour un système du premier ordre générique.

Remarque : Si le système n'est pas normalisé, il suffit de décaler la courbe précédente de telle manière à ce qu'elle soit centrée sur la pulsation de coupure $\omega_0 \neq 1$.

Phase de F_1 : La fonction donnant le gain en décibels de la fonction de transfert est donnée (calcul de module de nombres complexes) ci-dessous :

$$\varphi_{F_1}(\omega) = \text{atan2}(\omega/\omega_0, 1).$$

On pourra donc étudier les cas limites :

i Cas $\omega \rightarrow 0$: si on annule ω , alors on aura $\text{atan2}(0, 1) = \text{atan}(0) = 0^\circ$. Le diagramme commence donc à une ordonnée nulle.

ii $\omega \rightarrow \omega_0$:

$$\varphi_{F_1}(\omega_0) = \text{atan2}(1, 1) = \text{atan}(1) = 45^\circ.$$

iii Cas $\omega \rightarrow \infty$:

$$\varphi_{F_1}(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \text{atan2}(x, 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \text{atan}(x) = 90^\circ.$$

On a donc le diagramme qui se termine avec la valeur de 90 degrés. On peut approcher le diagramme de Bode en phase en traçant les deux branches infinies en zéro et en l'infini. Autour de la pulsation propre, nous pouvons utiliser une approximation qui vise à tracer une droite reliant les deux précédentes asymptotes dans l'intervalle $[0.1\omega_0, 10\omega_0]$.

Nous pouvons résumer nos approximations et nos vraies valeurs pour un système normalisé de pulsation de coupure unitaire générique à la figure 7.2, on pourra remarquer en particulier le tracé de l'asymptote oblique.

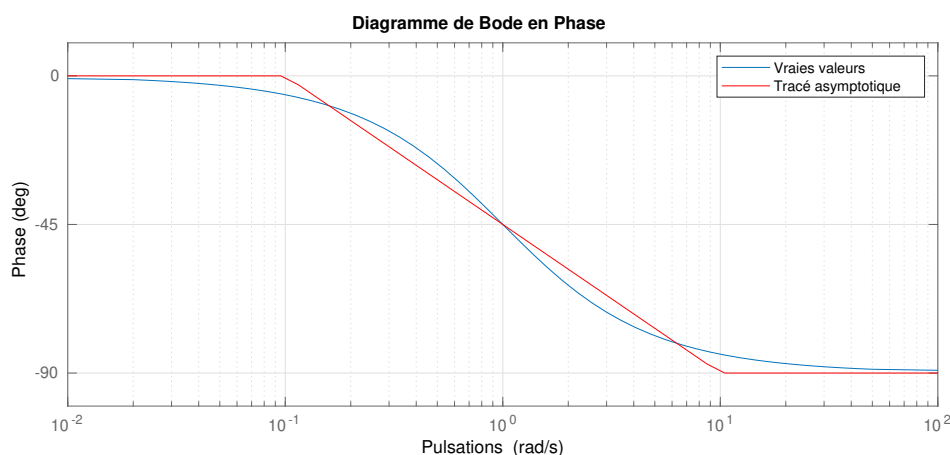


FIGURE 7.2 – Diagrammes de Bode approchés et analytiques en phase pour un système du premier ordre générique.

Cas des pôles conjugués complexes : Des pôles conjugués complexes ont la même constante de temps. En particulier, on peut considérer que deux pôles conjugués complexes se comportent asymptotiquement comme un pôle réel double $\beta_i = 2$. Pour un système d'ordre deux à gain unitaire et à pôles complexes conjugués générique :

$$F(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi s}{\omega_0^2} + 1},$$

on pourra négliger dans le tracé l'influence du terme en s en égalant $\xi = 1$ ce qui revient à tracer le diagramme de Bode de $F(s) = \frac{1}{(1+s/\omega_0)(1+s/\omega_0)}$. Ce terme n'est pas

asymptotiquement déterminant au sens des limites lorsque $\omega \rightarrow 0$ ou $\omega \rightarrow \infty$ tant en phase qu'en gain.

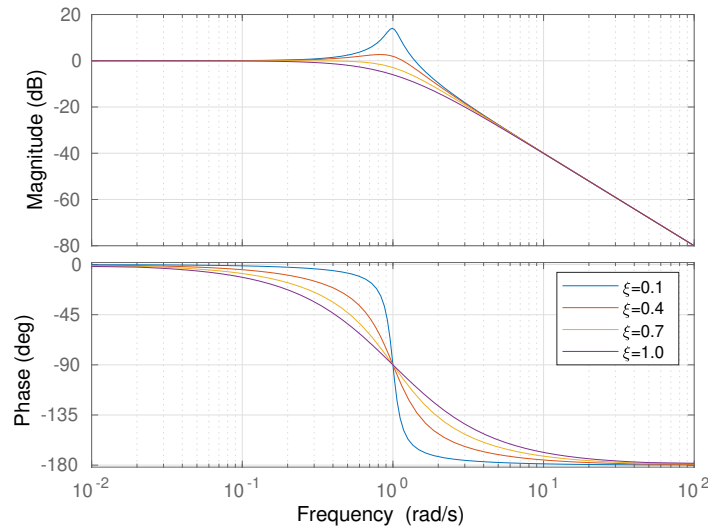


FIGURE 7.3 – Diagrammes de Bode exacts pour un système $\omega_0 = 1$ rad/s et à amortissement ξ variable.

Cependant, lorsque $\xi < 0.5$ on pourra noter l'apparence d'un phénomène de résonance sur le diagramme de Bode en amplitude, caractérisé par une augmentation du gain aux abords de la pulsation naturelle ω_0 comme on peut le voir à la figure 7.3.

On doit donc appliquer la méthode précédemment évoquée pour les systèmes du premier ordre en considérant un pôle double $p = \frac{1}{\omega_0}$. Ceci résulte en un diagramme asymptotique en gain de pente de -40 décibels par décade ainsi qu'une phase allant de 0 à -90 degrés.


Propriété 7.1 : Inverse de fonction de transfert et diagrammes de Bode

Grâce à des bons cours de mathématiques de base, on sait que $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0$ la fonction logarithme vérifie $\log(\frac{1}{a}) = -\log(a)$. De plus, on sait également (Cf. 2) que $\forall z \in \mathbb{C}$ donc l'argument d'un nombre d'affixe inverse vaudra : $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$.

Par conséquent pour toute fonction de transfert F , on aura les deux relations suivantes utiles pour les tracés en gain et en phase :

$$G(s) := \frac{1}{F(s)} \Rightarrow \begin{cases} 20 \log(|G(j\omega)|) = -20 \log(|F(j\omega)|) \\ \phi_G(j\omega) = -\phi_F(j\omega) \end{cases}$$

d) Un exemple de tracé


Exemple 7.1 : Fonction de transfert composée Soit la fonction de transfert :

$$F(s) = 100 \frac{s + 1000}{(s^2 + 20s + 10000)(s + 1)},$$

Tracer ses diagrammes de Bode.

Tout d'abord on **normalise** les polynômes en remarquant que :

$$F(s) = 10 \frac{\frac{s}{1000} + 1}{(\frac{s^2}{10000} + \frac{s}{50} + 1)(s + 1)}$$

En faisant ceci, on remarque que la fonction de transfert est séparable en produit de trois fonctions de transfert unitaire et un gain : $F(s) = K F_1(s) F_2(s) F_3(s)$. On notera $K = 10$, $F_1(s) = \frac{s}{1000} + 1$, $F_2(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{10000} + \frac{s}{50} + 1}$ et $F_3(s) = \frac{1}{s+1}$. Nous allons effectuer le tracé approché asymptotique «à la main» pour les gains des trois fonctions. Puis sur la même figure, on fera la somme des tracés afin d'obtenir le tracé résultant asymptotique du diagramme de Bode.

1. F_1 est une fonction de transfert d'ordre un à un **zero**. Il s'agit de l'inverse d'une fonction de transfert à un pôle d'ordre un et de pulsation de coupure

1000 rad/s. Il suffira de tenir compte de la propriété vue précédemment à la page 133.

2. F_2 est une fonction d'ordre 2 dont la pulsation de coupure vaut 10 rad/s, sachant cela on peut donc tracer ses diagrammes de Bode aisément.
3. F_3 est une fonction de transfert d'ordre 1 avec pour pulsation de coupure 1 rad/s.
4. On effectue également le tracé des diagrammes de Bode du gain statique $K = 10$ mais seulement sur le diagramme de Bode en gain ; celui en phase n'est pas affecté (on rappelle que l'argument d'un réel positif est zéro).
5. Il suffit d'ajouter tous les tracés élémentaires pour obtenir les tracés des diagrammes de Bode de F ; on rappelle que cette sommation vient des équations (7.1) et (7.3).

Le tracé asymptotique est illustré à la figure 7.4, les numéros correspondent aux points de la liste précédente.

Le tracé numérique exact du même diagramme de Bode est visible à la figure 7.5. Ce dernier est effectué sur **Matlab** avec la fonction `bode()`. Le tracé asymptotique en rouge donne une allure du tracé des diagrammes numériques, on remarque que nous retrouvons tous les coefficients directeurs et les asymptotes du tracé exact. Cependant, quelques phénomènes furent négligés, notamment une résonance (augmentation du gain à 10^2 rad/s), due à la présence d'un deuxième ordre avec $\xi \leq 0.5$.

On notera également que le tracé en phase n'est exact qu'aux limites et aux points correspondant aux pulsations propres des sous-systèmes F_i : ceci est dû au fait que ce tracé asymptotique n'est qu'une linéarisation d'une fonction non-linéaire (en l'occurrence ici, la fonction arc-tangente). En gain, on retrouve l'allure du tracé plus aisément puisque le gain découle de fonctions logarithmiques et que notre tracé est effectué dans une échelle logarithmique en abscisse.

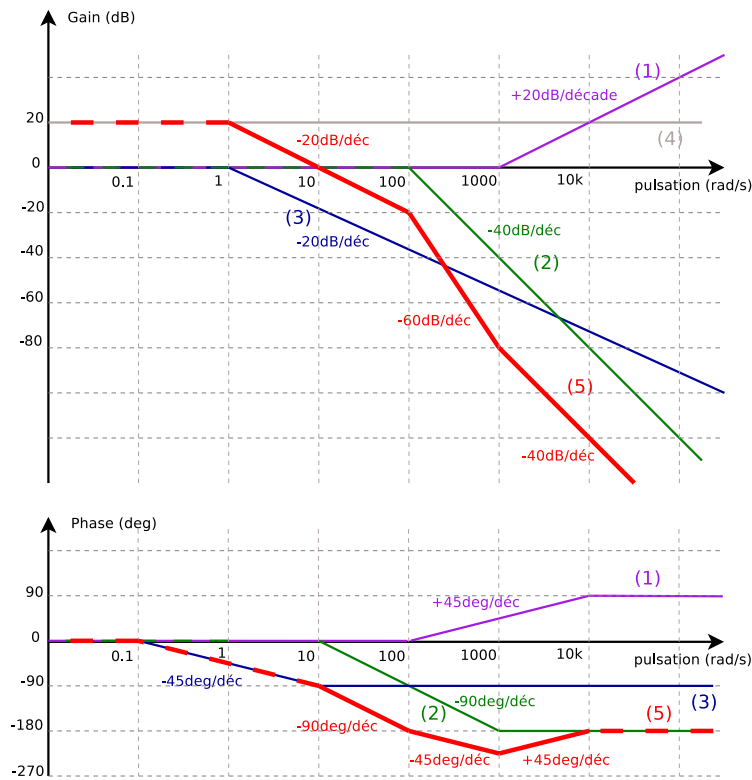


FIGURE 7.4 – Tracé asymptotique des diagrammes de Bode la fonction de transfert F .

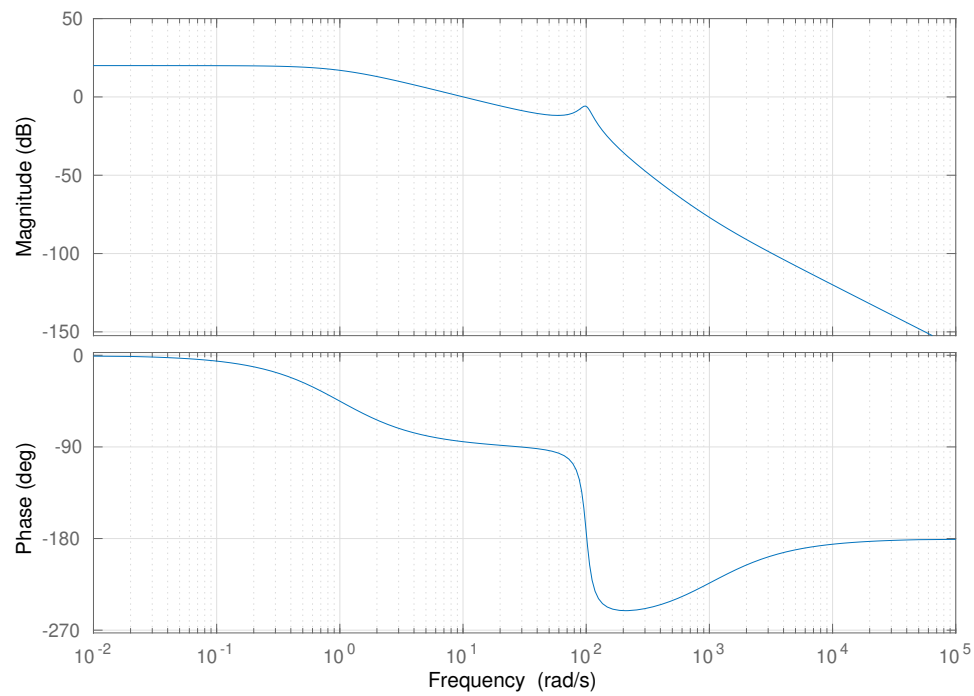


FIGURE 7.5 – Tracé numérique des diagrammes de Bode la fonction de transfert F sur Matlab.

II.B Critère de Nyquist

Nous introduisons ici un autre outil d'analyse puissant, qui est connexe aux méthodes fréquentielles tout en venant de l'analyse complexe en mathématiques. Comme dans tout ce chapitre, le but est maintenant de développer une méthode permettant de savoir ce qu'il se passe lors d'une fermeture de boucle de rétroaction sans avoir à calculer les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée. Dans cette section, nous étudierons essentiellement la stabilité des systèmes asservis à l'aide d'une méthode en boucle ouverte.

a) Théorème de Cauchy ★

En analyse complexe, le théorème de Cauchy est défini comme suit :

Théorème 3. *(De Cauchy) Soit une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, fonction de la variable $s \in \mathbb{C}$. Supposons que cette fonction ait N_P pôles et N_Z zéros à l'intérieur de Γ un contour orienté et fermé. Si on parcourt dans le sens anti-trigonométrique les points $p \in \Gamma$ dudit contour, alors la courbe Γ_f définie par $f(p \in \Gamma)$ décrira autour du point $(0,0)$ exactement $N_T = N_P - N_Z$ tours positifs. N_T est incrémenté de 1 à chaque tour dans le sens trigonométrique ; et respectivement décrémenté de 1 dans le sens inverse.*

Nous notons que le sens trigonométrique est l'inverse de celui des aiguilles d'une montre.

Ce résultat est intéressant. Supposons que nous choissions un simple contour Γ qui envelopperait le demi-plan à partie réelle positive du plan $\mathcal{C}$. Alors la différence $P - Z$ serait une donnée intéressante pour savoir combien de pôles appartiennent à ce demi-plan. On rappelle que l'appartenance à ce demi-plan est synonyme d'instabilité...

b) Application du théorème de Cauchy à un système en boucle fermée

Soit un système physique $F(s)$ bouclé avec un gain $K \in \mathbb{R}$, comme montré sur la figure 7.6, on définit la fonction de transfert en boucle fermée du système $\frac{Y(s)}{R(s)} := H(s)$.

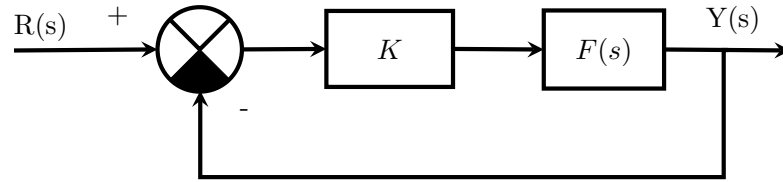


FIGURE 7.6 – Système utilisé générique pour le critère de stabilité de Nyquist.

On peut exprimer $H(s)$ comme suit :

$$H(s) = \frac{KF(s)}{1 + KF(s)} = \frac{F(s)}{F(s) + \frac{1}{K}}.$$

Étudier la stabilité de $H(s)$ revient à montrer s'il existe des pôles à partie réelle positive de $H(s)$. C'est-à-dire trouver le nombre de racines à partie réelle positive de $F(s) + 1/K = 0$.

Remarque : Le point $(-1/K, 0)$ du plan complexe est appelé point critique.

Application du théorème de Cauchy : On applique le théorème de Cauchy à $f(s) = 1 + KF(s)$.

Cela revient à étudier $g(s) = KF(s)$ avec pour origine le point critique $P = (-1/K, 0)$ en effectuant une translation du problème dans le plan. En effet dire que Γ_f effectue N_T tours autour de $(0, 0)$ est équivalent à dire que Γ_g effectue N_T tours autour de P .

Zéros de $f(s)$: Étudier les zéros de cette fonction dans Γ revient à étudier les pôles en boucle fermée du système. Étudier les pôles de cette fonction revient à étudier les pôles en boucle ouverte. Appliquer le théorème de cette façon avec un contour englobant le demi-plan droit complexe mène au critère de Cauchy défini ci-après.

c) Choix du contour Γ

Maintenant, il s'agit de trouver un contour qui englobe toute la région intéressante pour nous, c'est-à-dire le demi-plan $\mathbb{C}^+ = \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) \geq 0\}$, c'est-à-dire **où les pôles instables se trouvent**.

Plaçons nous dans le cas où aucun pôle en boucle ouverte se trouve sur l'axe des imaginaires. C'est-à-dire que si on note les N pôles en boucle ouverte du système comme suit :

$$p_i = \sigma_i + j\omega_i \quad , \forall i \in [1, N], \sigma_i \in \mathbb{R}, \omega_i \in \mathbb{R}, p_i \in \mathbb{C},$$

alors on exclut le cas où il existe un pôle p_i tel que $\sigma_i = 0$.

Sous cette hypothèse, le contour de Nyquist Γ à choisir est très simple, un demi-cercle de rayon R centré sur l'origine du plan complexe. On peut découper en trois régions ce cercle : (1) la région circulaire, (2) le demi-segment $[0, +R]$ et (3) son penchant négatif $[-R, 0]$. La construction géométrique est expliquée sur la figure 7.7.

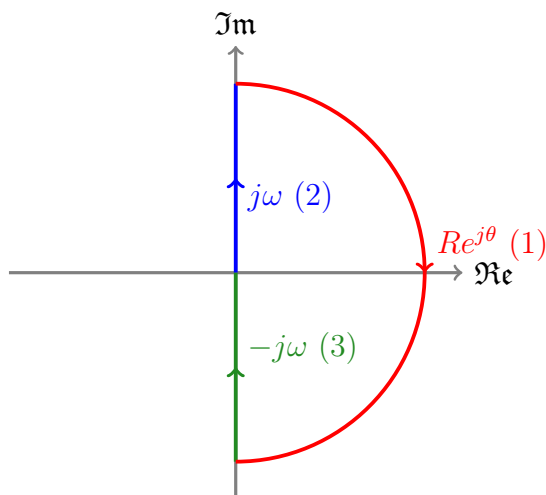


FIGURE 7.7 – Contour Γ «classique» de Bromwich.

Notre but est de transformer ce contour en un contour qui englobe tout le demi plan droite, **la région d'instabilité** $\mathbb{C}^+$ en d'autres termes. Si R tend vers l'infini, c'est chose faite. Pour appliquer par la suite le théorème de Cauchy pour savoir si nos pôles demeurent instables en **boucle fermée** on doit tracer le contour Γ_F si $F(s)$ est **la fonction de transfert en boucle ouverte du système que l'on étudie**. On rappelle que $\Gamma_F = F(\Gamma)$, c'est l'image du contour par la fonction en boucle ouverte.

d) Contours en présence de pôles sur l'axe des imaginaires

Dans le cas où il existerait un pôle de $F(s)$ sur l'axe des imaginaires, il faut en tenir compte dans le tracé du lieu. En effet, le tracé du lieu de Nyquist requiert l'absence de pôles en boucle ouverte sur le contour antécédent Γ .

Ainsi, dans ces cas particuliers, nous ajoutons une portion de contour qui est un petit demi-cercle autour des pôles incriminés. L'astuce consiste à paramétrer le contour autour des pôles p_i sur l'axe des imaginaires comme suit :

$$\Gamma(z) = re^{j\theta}, r \rightarrow 0, \theta \in [-\pi/2, \pi/2], z \in v(p_i),$$

avec $v(p_i)$ voisinage du pôle p_i .

En pratique, les contours utilisés ainsi que leur paramétrisation sont donnés dans les pages qui suivent. La figure 7.8 traite du cas où un intégrateur serait présent dans le système. La figure 7.9 (★) traite du cas où deux pôles conjugués imaginaires seraient présents.

e) Calcul de Γ_F

On doit paramétrer suivant les trois régions le contour Γ et étudier le tracé du contour Γ_F :

- (1) Le contour sur cette région est défini par tous les points d'affixe z de $\mathbb{C}^+$ respectant l'équation suivante :

$$z = R \exp(j\theta), \quad \text{avec } \theta \in [-\pi, \pi], R \rightarrow \infty.$$

Il suffit donc de calculer $F(z)$ dans ce cas. Et regarder les termes dominants en R^N lors de l'étude de la limite lorsque R tend vers l'infini, on peut négliger les autres.

- (2) Le contour sur cette région est défini par $z \in \mathbb{C}^+, z = jR$ avec $R \in [0, \infty]$. Si on change un peu les notations, en écrivant $\omega := R$ on se rend compte que cela revient à tracer la réponse harmonique de F . En effet dans cette région $F(z) = F(j\omega)$ pour ω qui balaye **tous les réels positifs**. Or, on a vu précédemment comment tracer des diagrammes de Bode qui donnent l'évolution, en

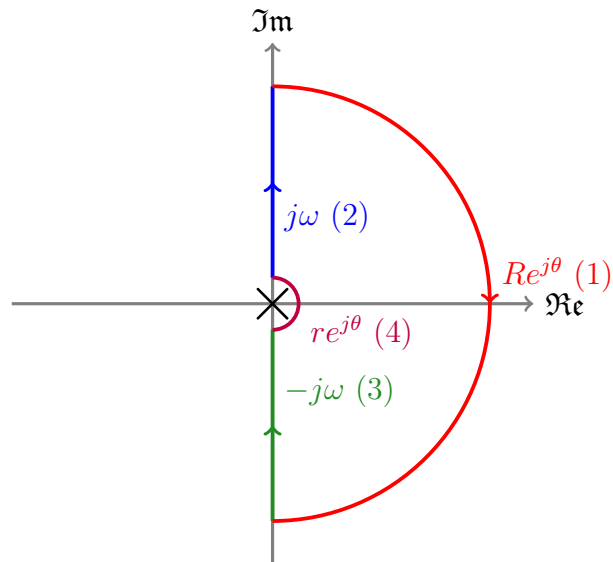


FIGURE 7.8 – Contour évitant un intégrateur sur l'axe des imaginaires.

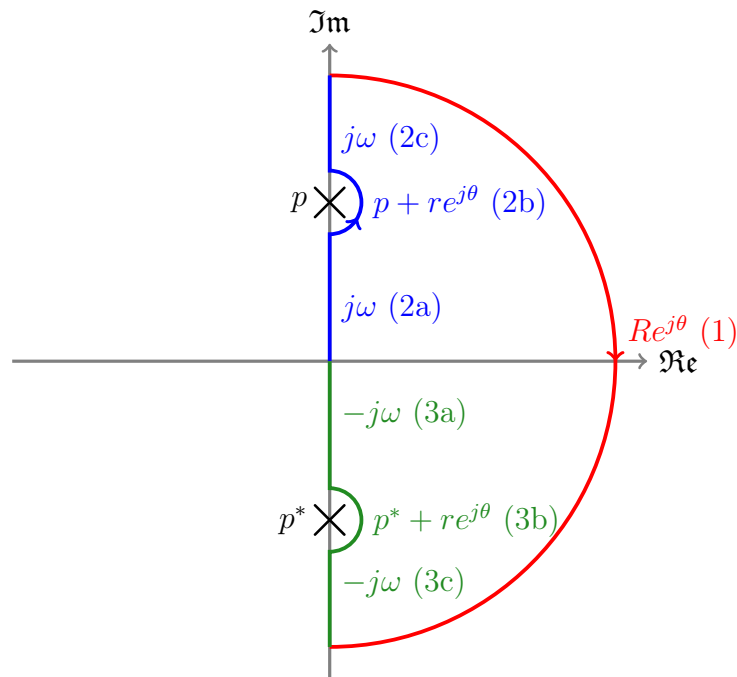


FIGURE 7.9 – Contour évitant des pôles conjugués sur l'axe des imaginaires. (★)

coordonnées polaires, de $F(j\omega)$ la phase étant un argument et le gain étant le logarithme du module...

- (3) Ici $z = -j\omega$, nous pouvons utiliser des propriétés de symétrie par rapport à (2) pour calculer ceci : tracer l'image de la partie de contour (3) revient à tracer la portion de contour **symétrique par rapport à l'axe des réels de l'image de (2)**.

Remarque : Le contour Γ_F est toujours fermé.

f) Critère de stabilité de Nyquist

Le théorème 3 appliqué au contour précédemment défini nous donne le critère de stabilité suivant :

Le système en boucle fermée $H(s)$ n'est stable que si ses pôles ont une partie réelle strictement négative.

$\Leftrightarrow$

Le tracé de Γ_F , décrivant N_T tours ^a autour du **point critique de coordonnées** $(-1/K, 0)$ respecte l'égalité suivante :

$$N_T = N_{BO}.$$

Où N_{BO} est le nombre de pôles instables en boucle ouverte du système appartenant au contour Γ . C'est-à-dire les pôles instables de $F(s)$.

^a. Comptés comme indiqué dans le théorème 3 dans le sens trigonométrique.

g) Quelques exemples de tracés et leur interprétation



Exemple 7.2 : Tracé 1 Tracer le lieu de Nyquist pour la fonction de transfert F et interpréter les zones de stabilité pour un bouclage proportionnel K variant dans l'espace des réels avec :

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{2}s + 1}.$$

Tracé : procédons par étapes.

1. **Présence de pôles instables :** clairement, non puisque les coefficients du dénominateur sont strictement positifs, le dénominateur étant un polynôme d'ordre deux, on peut conclure sur la stabilité stricte des pôles de $F(s)$. **Corollaire :** aucun pôle n'est sur l'axe des réels : on va utiliser un lieu de Bromwich classique.

2. **Diagrammes de Bode approchés :** clairement, on a un ordre deux tel que :

$$F(\omega) = \frac{K}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}(j\omega) + 1}, \text{ avec } \{K = 1, \omega_0 = 1 \text{ rad/s}, \xi = \frac{1}{4}\}.$$

Ainsi, on a les diagrammes de Bode approchés à la figure 7.10.

On apprend de ceux-ci que le diagramme de Black⁴ commence ($\omega \rightarrow 0$) à la coordonnée (0 dB, 0°) ce qui signifie que dans le plan $\mathcal{S}$ de Laplace, cela sert (1, 0°) en polaire soit (0, 1) en coordonnées cartésiennes. Ensuite, la phase diminue jusqu'à atteindre $-\pi$ et le gain décroît continuellement. Ceci signifie que le diagramme passe par des coordonnées à parties imaginaires négatifs et tend asymptotiquement vers l'origine en arrivant par $-\pi$ c'est-à-dire dans la direction opposée de l'axe des réels. L'allure du lieu pour la portion (2) du contour de Bromwich ressemblera à la figure 7.11.

3. **Point singulier :** La portion (1) du contour donne un point qui est l'origine. En effet $\forall \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F(Re^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^2 e^{2j\theta} + \frac{1}{2}Re^{j\theta} + 1} = 0.$$

4. Sera présenté ultérieurement dans le chapitre.

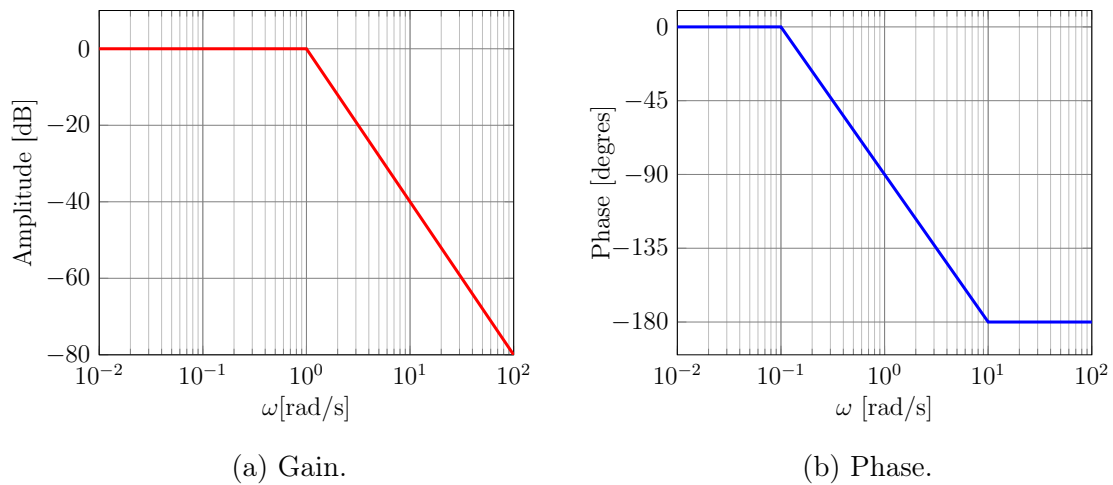


FIGURE 7.10 – Diagrammes de Bode approchés.

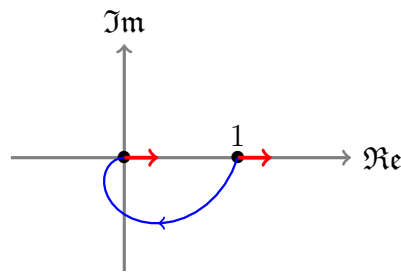


FIGURE 7.11 – Construction approchée du contour, région (2).

ceci est démontrable grâce au module en se rappelant que $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$, en montrant que ce dernier tend vers zéro.

Le point origine est bien dans le lieu.

4. **Symétrie** : appliquons la symétrie suivant l'axe des réels pour tracer le lieu correspondant à la région (3) (en violet). Nous pouvons tracer le lieu approché au complet en incluant la région (1) du contour (point vert). Le résultat approché est visible sur la figure 7.12.
5. **Comparaison avec le tracé exact** : nous remarquons ici que $\xi = 1/4 > 1/2$ ce qui est propice à une résonance. En effet, c'est le cas. Notre tracé asymptotique des diagrammes de Bode était approché et nous avons donc négligé une

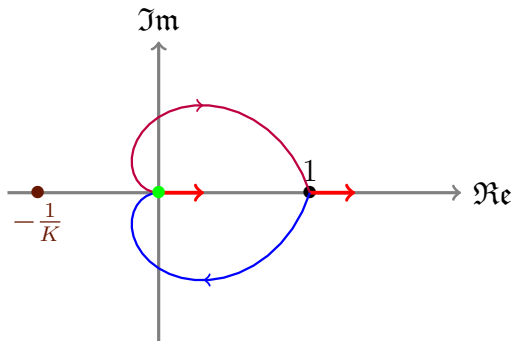


FIGURE 7.12 – Contour de Nyquist approché.

«bosse» de gain à la pulsation de coupure ω_0 ce qui explique l'allure différente de notre tracé approché (fig 7.12) et le tracé numérique «exact» (fig 7.13) toutefois, les interprétations sur la stabilité seront les mêmes dans notre cas.

Interprétation : Quel que soit le graphe utilisé (approché ou numérique), on peut interpréter les résultats de stabilité de manière identique.

On remarque que pour $-1/K \in [0, 1]$ on a $N_T = -1$ et que sinon $N_T = 0$. La question est de savoir s'il existe des pôles instables en boucle ouverte : la réponse est non. En appliquant le critère de Routh sur $F(s)$, on se rend compte que c'est un ordre deux : la condition nécessaire pour la stabilité d'avoir des coefficients au dénominateur de même signe (ce qui est le cas ici) s'applique et est suffisante. Donc $N_{BO} = 0$.

Donc, en appliquant le critère de Nyquist, on a la stabilité assurée si et seulement si $N_T = 0$. Ce qui mène au domaine de validité suivant pour la stabilité $\frac{-1}{K} \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Ces deux domaines disjoints mènent à la contrainte unique $K > -1$ excluant le cas trivial d'un gain nul (voir le tracé de la fonction $h(t) = -1/t$, figure 7.14, pour s'en convaincre). Le système est stable en boucle fermée pour tout gain K inférieur à 1.

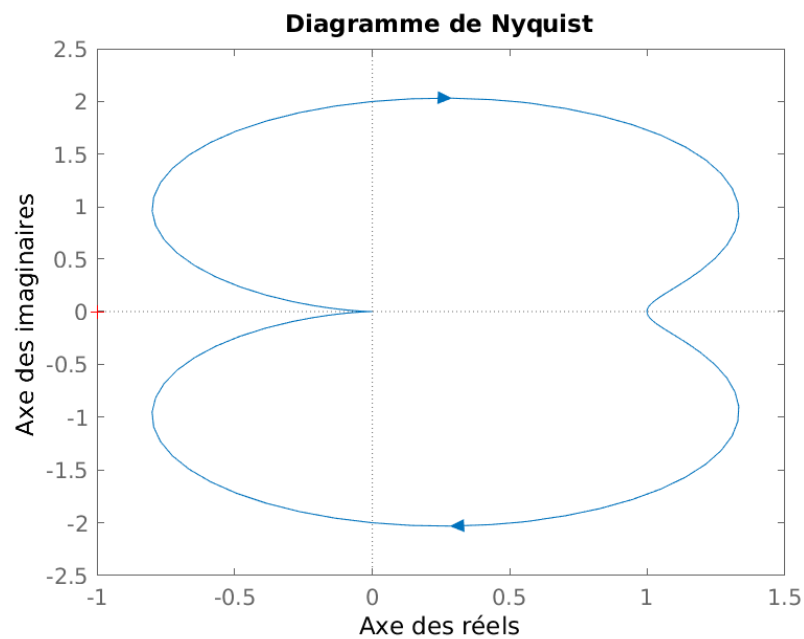


FIGURE 7.13 – Tracé du diagramme de Nyquist exact de l'exemple 7.2.

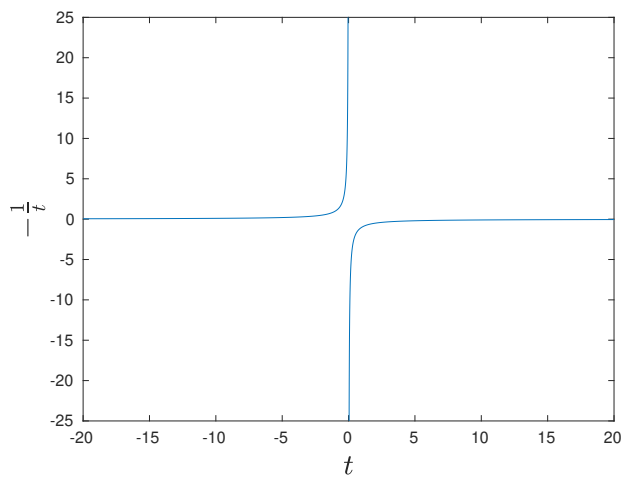


FIGURE 7.14 – Tracé de l'opposé de la fonction inverse.



Exemple 7.3 : Tracé 2 Interpréter le lieu de Nyquist de la fonction de transfert F et interpréter les zones de stabilité pour un bouclage proportionnel K . On donne le lieu en 7.15 et la fonction de transfert en fonction de la variable de Laplace comme suit :

$$F(s) = \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 4s + 1}.$$

Ici, on comprend mieux pourquoi on utilise un critère ne forçant pas à trouver les pôles en boucle fermée... surtout si cela dépend d'un gain K , les calculs peuvent être assez difficiles.

A) Pôles instables en boucle ouverte :

- La condition nécessaire du critère de Routh est vérifiée (les signes sont tous positifs strictement au dénominateur) mais est insuffisante toute seule : on doit calculer le tableau de Routh.
- Calcul du tableau de Routh, on prévoit la forme du tableau et on le préremplit :

s^4	1	8	1
s^3	4	4	0
s^2	a	b	0
s^1	c	0	0
s^0	d	0	0

$$a = \frac{4 \times 8 - 1 \times 4}{4} = 7,$$

$$b = \frac{1 \times 0 - 1 \times 4}{4} = -1,$$

$$c = \frac{7 \times 4 - 4 \times -1}{7} = \frac{32}{7},$$

$$d = \frac{c}{c} = 1.$$

- Le calcul ne révèle aucune alternance des signes sur la première ligne du tableau, le système n'a pas de pôles instables en boucle ouverte. $N_{BO} = 0$
- Le **système en boucle fermée est stable pour tout gain K respectant $N_T = 0$.**

B) Interprétation du lieu de Nyquist : voir figure 7.15.

Deux points d'intersection existent sur l'axe des réels, les points d'affixes $-\frac{1}{6}$ et 0. Quatre régions de variation de K sont donc à considérer :

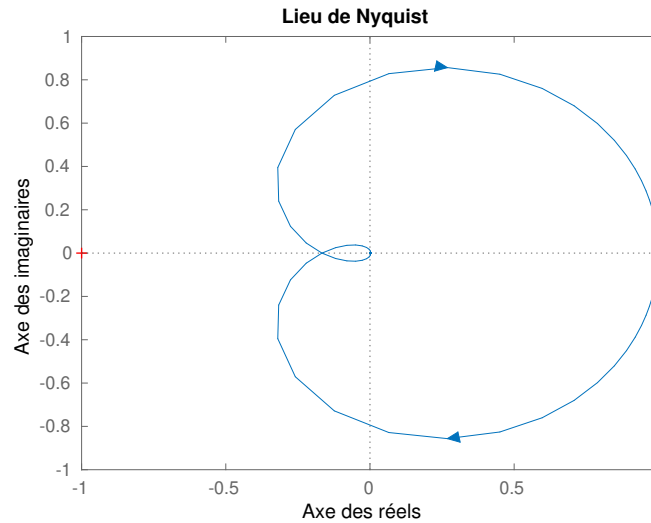


FIGURE 7.15 – Tracé 2.

- i) Pour $-\frac{1}{K} < -\frac{1}{6}$, le tracé ne fait aucun tour autour de ce point $N_T = 0$ **le système est stable.**
- ii) Pour $-\frac{1}{6} < -\frac{1}{K} < 0$, c'est plus délicat, deux contours entourent les points de ce segment. Le plus grand est dans le sens trigonométrique opposé, il décrémente le nombre de tours. Le plus petit est orienté dans le même sens, il décrémente le nombre de tours. $N_T = -2$. **le système est instable.**
- iii) Pour $0 < -\frac{1}{K} < 1$, $N_T = -1$. **le système est instable.**
- iv) Pour $1 < -\frac{1}{K}$, $N_T = 0$. **le système est stable.**

La condition de stabilité i) revient à choisir le segment $K \in]0, 6[$ et la condition iv) à choisir $K \in]-1, 0[$. Donc pour garantir la stabilité, on doit choisir un gain K non-nul respectant $-1 < K < 6$.

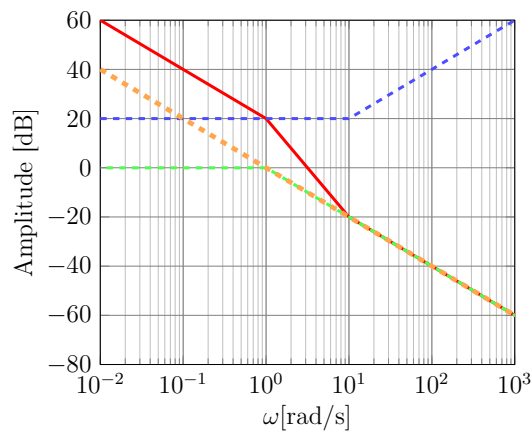


Exemple 7.4 : Tracé 3 Tracez le lieu de Nyquist pour la fonction de transfert F et interprétez la stabilité suivant les valeurs d'un bouclage proportionnel de gain K réel :

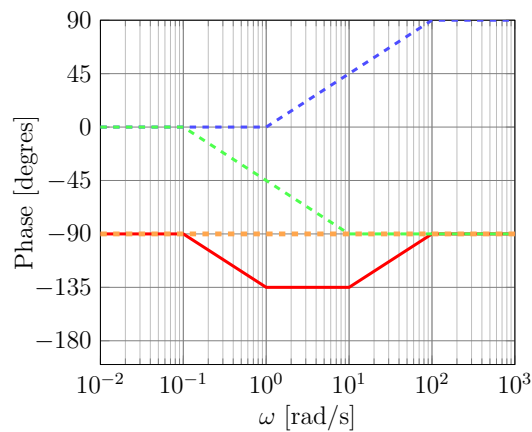
$$F(s) = \frac{s + 10}{s(s + 1)}.$$

Tracé :

1. **Pôles et zéros en boucle ouverte :** $z = -10$ est un zéro, $p_1 = 0$ et $p_2 = -1$ sont les pôles de F . On remarque qu'il y a un intégrateur (pôle sur l'axe des imaginaires) on choisit donc le contour Γ de la figure 7.8.
2. **Diagrammes de Bode** on effectue le tracé asymptotique de ces derniers par sommation (la **ligne rouge** continue est le résultat de la sommation des tracés de $\frac{1}{s}$ en orange, $\frac{1}{s+1}$ en vert et $10(s/10 + 1)$ en bleu) :



(a) Gain.



(b) Phase.

FIGURE 7.16 – Diagrammes de Bode approchés.

Retenons que le tracé arrive par le bas de l'axe des imaginaires (fort gain et phase à -90° lorsque $\omega \rightarrow 0$), approche la phase de -135° asymptotiquement et finit sa course en $(0,0)$ en rentrant par le même axe des imaginaires (gain très faible et phase à -90°).

3. Partie du contour (1) :

$$f(R, \theta) = F(Re^{j\theta}) = \frac{Re^{j\theta} + 10}{Re^{j\theta}(1 + Re^{j\theta})}.$$

en passant au module, on a (le produit des modules est égal au module du produit) :

$$|f(R, \theta)| = \frac{|Re^{j\theta} + 10|}{|Re^{j\theta}||Re^{j\theta} + 1|}$$

On remarquera que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |f(R, \theta)| = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|R|}{|R||R|} = 0$$

quel que soit l'argument θ ($|e^{j\theta}| = 1$). Donc l'origine fait partie du tracé.

4. Partie du contour (4) :

Ici on peut reprendre la fonction $f(R, \theta)$ en lui donnant l'argument r que l'on va faire tendre vers zéro :

$$\lim_{r \rightarrow 0} |f(r, \theta)| = +\infty$$

on a donc un tracé asymptotique.

son argument vaut (l'argument du produit est égal à la somme des arguments) :

$$\arg f(r, \theta) = \arg(re^{j\theta} + 10) - \arg(re^{j\theta}) - \arg(re^{j\theta} + 1),$$

et donc $\lim_{R \rightarrow 0} \arg f(r, \theta) = -\arg(re^{j\theta}) = -\theta$. Comme $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, le contour est fermé du côté droit du plan de Laplace. En effet, nous savons déjà de l'étude fréquentielle que lorsque $\omega \rightarrow 0^+$, le tracé démarre de l'axe des imaginaires vers le bas. Toutefois, par convention, l'image d'un contour de Bromwich par une fonction de transfert demeure un contour fermé, restait à savoir de quel côté de cet axe.

5. Tracé approché :

on trace le lieu venant de l'étude des diagrammes de Bode (2), le point asymptotique (l'origine) (1), le symétrique du tracé de Bode (3) et on identifie la branche asymptotique (4).

Pour les diagrammes de Bode (2), nous avons une asymptote verticale avec un argument polaire de -90° le gain décroissant, le tracé remonte l'axe des

imaginaires en partant de $-\infty$. Puis on tend vers le point à l'origine avec une phase décroissante jusqu'en $-3\pi/4$ avant de croître à nouveau en $-\pi/2$. La seule solution à ceci est un arc qui demeure dans le demi-plan gauche pour aller vers l'origine tout en ne franchissant pas l'axe des réels (ce qui importe pour nos conclusions). Le tracé symétrique (3) est effectué la suite.

Grâce au tracé (4), le contour de Nyquist est fermé : dans le cas d'une asymptote verticale, il est fermé à l'infini, ce qui est le cas ici. Le tracé à la figure 7.17 est un tracé exagéré qui met en évidence cette fermeture, si $r \rightarrow 0$ alors les deux tracés mauve (3) et bleu (2) s'écraieraient sur l'axe des imaginaires à l'infini mais nous ne visualiserions pas le tracé orange, qui représente l'image point (4) et la fermeture du lieu.

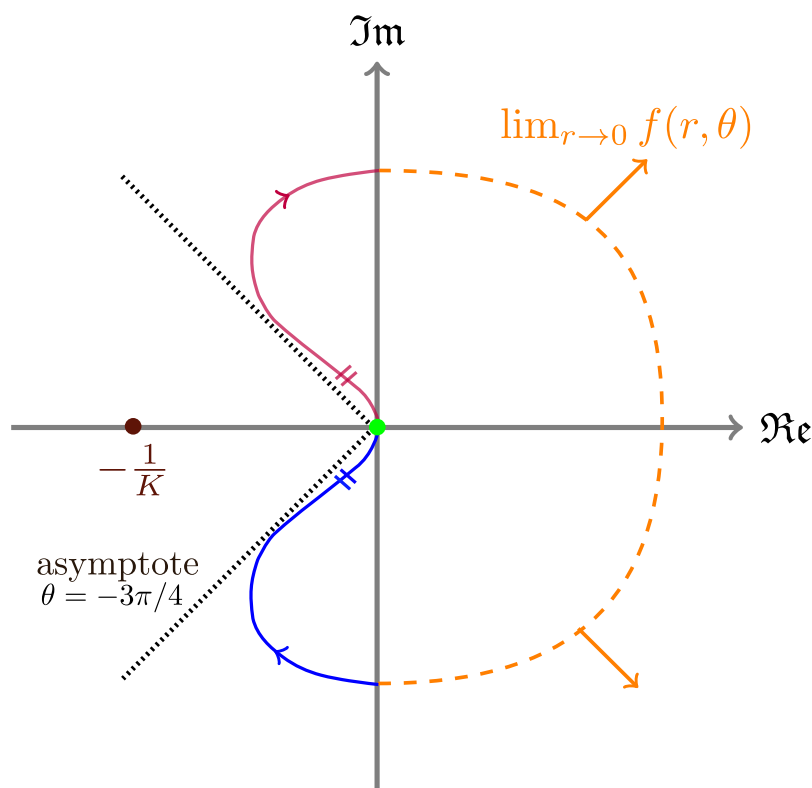


FIGURE 7.17 – Visualisation de la fermeture du lieu de Nyquist.

Interprétation : nous avons un pôle instable ($s = 0$) en boucle ouverte. Toutefois, le choix du lieu contour de Bromwich excluait ce pôle instable (voir figure 7.8), il n'est donc pas comptabilisé dans le compte des pôles en boucle ouverte appartenant à Γ . Si le point critique $\frac{-1}{K}$ respecte $N_T = 0$ dans le lieu de Nyquist alors le système en boucle fermée est stable.

L'asymptote est du côté du demi-plan gauche : le contour englobe l'intégralité du demi-axe des réels négatifs car le contour est fermé à l'infini. Le sens de l'enlacement est le sens trigonométrique, ainsi $\forall -\frac{1}{K} < 0, N_T = 0$ et $\forall -\frac{1}{K} > 0, N_T = -1$. Ce qui nous amène à la conclusion suivante : le système en boucle fermée n'est stable que si son bouclage proportionnel possède un gain K strictement positif et instable sinon.

h) Critère du revers (Critère de Nyquist simplifié)

Soit un système $F(s)$ **sans aucun pôle instable**, alors il existe une version simplifiée du critère de Nyquist spécifique à ce cas. La stabilité pour le système bouclé unitaire ($K = 1$ pour celui de la figure 7.6) est assurée si le point critique $(-1, 0)$ est laissé à gauche du tracé du lieu pour $F(j\omega)$ pour ω variant de 0 à $+\infty$.

II.C Marges de stabilité

Pour un système linéaire à coefficients constants, la stabilité est un critère logique, soit un système est stable soit il ne l'est pas. Cependant, on peut définir un critère de stabilité quantitatif qui nous dit à quel point le système est proche d'être instable.

a) Marge de phase

La marge de phase d'un système H est définie comme suit :

- Soit la pulsation ω_ϕ définie telle que $|H(\omega_\phi)| = 1$ ou de manière équivalente $G_{H,dB}(\omega_\phi) = 0$ dB.
- La **marge de phase** M_ϕ de H est définie comme étant égale à :

$$M_\phi = \phi(\omega_\phi) + 180^\circ.$$

b) Marge de gain

La marge de gain d'un système H est définie comme suit :

- Soit la pulsation ω_G définie telle que $\varphi_H(\omega_G) = -180^\circ$.
- La **marge de gain** M_φ de H est définie comme étant égale à :

$$M_G = G_{H,dB}(M_\varphi).$$

La marge de gain peut ne pas exister, pour un système ne présentant jamais de phase inférieure à 180 degrés.

c) Critère du revers adapté aux marges

Rappel : ce critère ne s'applique qu'aux systèmes **stables en boucle ouverte**.

Le point critique P pour $K = 1$ est paramétré par $P = (-1, 0)$ dans le plan complexe. Cependant, on peut le paramétrer en coordonnées polaires comme étant ($G_{dB} = 0$ dB, $\varphi = 180^\circ$). Si on applique le critère du revers aux notions de marges, le point P est laissé sur la gauche si et seulement si :

$$M_\varphi > 0 \text{ ET } M_G > 0.$$

Ce qui équivaut à dire que tout système stable en boucle ouverte vérifiant les propriétés précédentes sera stable en boucle fermée.

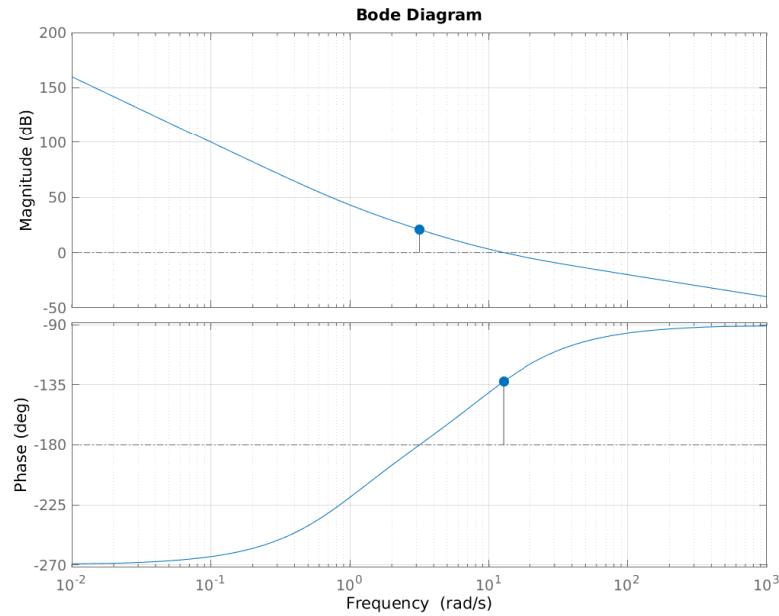
Remarque : Si la marge de gain est infinie, on notera que $+\infty > 0$, à bon entendeur.

Exemple 7.5 : Cas d'un système instable en BO Étudions les marges et la stabilité du système suivant :

$$F(s) = \frac{10(s+1)(s+10)}{s^3},$$

lorsqu'il est bouclé sur un compensateur proportionnel de gain unitaire.

L'étude fréquentielle mène au tracé des diagrammes de Bode de la figure 7.18.

FIGURE 7.18 – Diagramme de Bode de $F(s)$.

Ainsi on trouve $M_G = -20.8$ dB et $M_\varphi = 47.4^\circ$, ce qui pourrait être synonyme d'instabilité selon le critère du revers, cependant, le système est instable en boucle ouverte. On ne peut pas appliquer le critère du revers : étudions la stabilité en boucle fermée.

La fonction en boucle fermée s'écrit :

$$H(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)} = \frac{10s^2 + 110s + 100}{s^3 + 10s^2 + 110s + 100},$$

nous dressons le tableau de Routh, la condition nécessaire étant vérifiée :

s^3	1	110
s^2	10	100
s^1	100	.
s^0	100	.

On remarque que la première ligne ne possède aucun changement de signes. Le système **est stable** en boucle fermée alors que **la marge de gain est négative** !

Attention donc à ne pas appliquer sur un système quelconque le critère du revers.

Exemple 7.6 : Système d'ordre un retardé Soit le système suivant :

$$F(s) = \frac{K e^{-Ls}}{1 + \tau s},$$

avec $K = 10$, $\tau = 3$ s et le retard $L > 0$. Déterminer le retard maximal L_{lim} tel que le système bouclé sur un compensateur proportionnel de gain $K_p = 1$ devient instable. Utiliser une approche par marge de phase.

Appliquons le critère du revers puisque aucun pôle en BO n'est instable.

Recherche de ω_g : Se souvenant que le produit des modules est le module des produits et que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, |e^{j\alpha}| = 1$, on peut montrer que :

$$G_F(\omega) = \left| \frac{K e^{-jL\omega}}{1 + j\omega\tau} \right| = \left| \frac{K}{1 + j\omega\tau} \right| = \frac{10}{\sqrt{1 + 9\omega^2}},$$

ce qui est l'expression du gain standard pour un système du premier ordre.

On rappelle que $G_{\text{dB,F}}(\omega_g) := 0 \text{ dB} \Leftrightarrow G_F(\omega_g) = 1$ ainsi :

$$10 = \sqrt{1 + 9\omega_g^2} \Leftrightarrow 100 = 1 + 9\omega_g^2 \Leftrightarrow \omega_g = +\sqrt{\frac{99}{9}} = \sqrt{11}$$

Calcul de la phase pour exprimer la marge : on se souviendra que l'argument du produit est égal à la somme des arguments et que $\arg e^{j\alpha} = \alpha$.

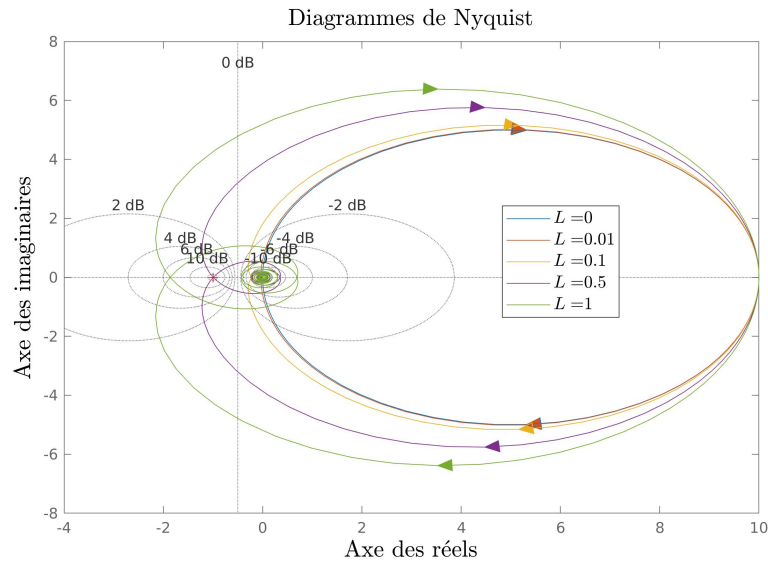
$$\varphi_F(\omega) = \underbrace{\arg K}_{=0} - \arg(e^{-jL\omega}) + \arg(1 + j\omega\tau) = -L\omega - \arctan(\omega\tau)$$

On se souvient maintenant que $M_\varphi = \pi - \varphi_F(\omega_g)$, ainsi :

$$M_\varphi = \pi - -L\omega_g - \arctan(\omega_g\tau),$$

le système est instable en appliquant le critère du revers si $M_\varphi < 0$ et L_{lim} est obtenu pour $M_\varphi = 0$. Ainsi :

$$L_{\text{lim}} = \frac{\pi - \arctan(\omega_g\tau)}{\omega_g} = \frac{\pi - \arctan(3\sqrt{11})}{\sqrt{11}} \approx 0.504$$

FIGURE 7.19 – Diagrammes de Nyquist en fonction du retard L .

nous pouvons visualiser le phénomène d'instabilité introduite par le retard à la figure 7.19.

En effet, si ce dernier est trop important, on obtient le point critique (point de fonctionnement pour $K_p = 1$, croix rouge sur la figure) à l'intérieur du tracé en spirale induit par l'argument du retard. Ceci provoque un nombre de tour non-nul (alors qu'il n'y a pas de pôles instables en boucle ouverte) et le critère de Nyquist conclut sur l'instabilité. Si le système est peu retardé, $L \rightarrow 0$ alors on s'approche d'un tracé d'un lieu de Nyquist pour un premier ordre non-retardé. Les retards au sein d'un système en boucle ouverte peut donc être une source d'instabilité en boucle fermée.

II.D Lieu de Black-Nichols ★

Outil indissociable des Diagrammes de Bode, le lieu de Black-Nichols permet de prédire les performances en boucle fermée d'un système dont on ne connaît que la réponse fréquentielle en boucle ouverte.

a) Définition

Le lieu de Black-Nichols d'une fonction de transfert en boucle ouvert $F(s)$ est un tracé cartésien Γ paramétré par la pulsation ω définie comme suit :

$$\Gamma = \{\forall (x, y) \in \Gamma; x(\omega) = G_{F,dB}(\omega), y(\omega) = \varphi_F(\omega)\}$$

où $G_{F,dB}(\omega)$ est le gain en décibels de F et $\varphi_F(\omega)$ sa phase en degrés.



Exemple 7.7 : Un petit exemple sur ordinateur pour mieux comprendre : Tracer les diagrammes de Bode, puis celui de Black-Nichols de :

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 6s + 12)(1 + s)}.$$

L'étude du diagramme de Bode et de Black peut se faire également sur ordinateur, dans le programme **Matlab** on peut successivement entrer les commandes suivantes :

```

1 s = tf('s')           % s est le 's' de Laplace
2 F = 1/((s+6*s+12)*(1+s)) % on entre F(s)
3 bode(F)               % calcul du diagramme de Bode
4 grid on               % on rajoute les axes en log
5 nichols(F)            % calcul du diagramme de Black
6 grid on               % on rajoute aussi les axes

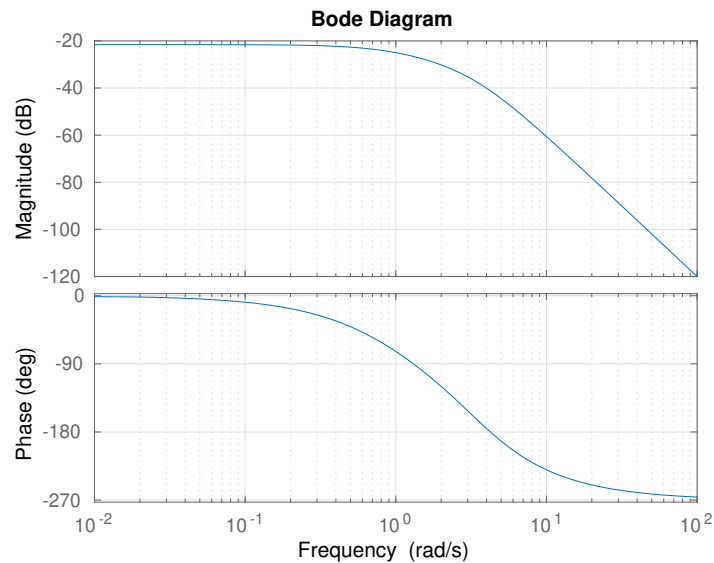
```

Le résultat de l'étude fréquentielle par diagrammes de Bode est visible à la figure 7.20. Si on trace le résultat obtenu dans le diagramme en amplitude en ordonnée et le résultat obtenu en diagramme de phase en abscisse, on obtient le lieu (ou diagramme) de Black-Nichols visible à la figure 7.21.

Sur le lieu de Black, on peut observer directement la marge de gain et la marge de phase du système en boucle ouverte ce qui est un de ses avantages.

b) Application du critère du revers au lieu de Black

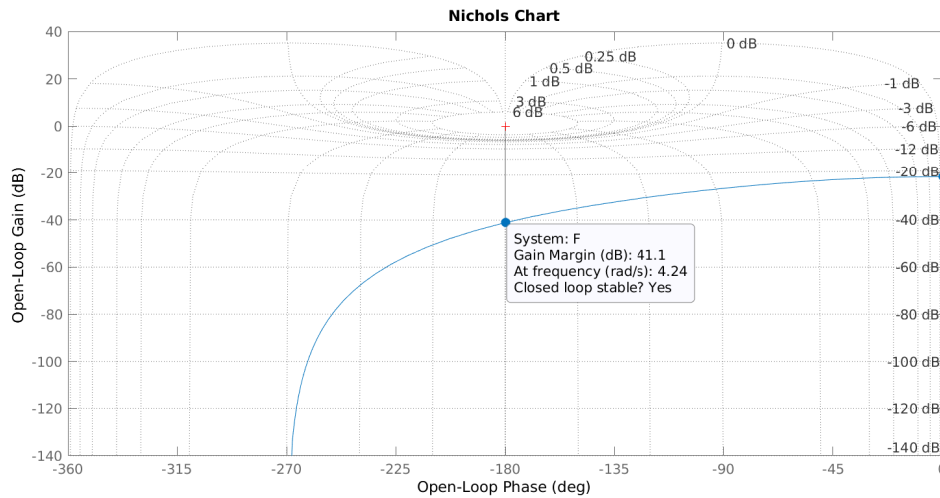
Le critère du revers s'exprime toujours de la même façon. **Si le système est stable en boucle ouverte** ALORS le système l'est également en boucle fermée

FIGURE 7.20 – Diagrammes de Bode de $F(s)$.

pour un gain unitaire si la courbe paramétrée fréquentielle laisse le point critique du plan complexe d'affixe $z_c = (-1, 0)$ sur sa gauche. En d'autres termes si les marges de stabilité sont positives OU infinies, on a la stabilité du système en boucle fermée.

Application au lieu de Black-Nichols : Le point d'affixe $z_c = -1 + 0j$ peut être vu comme ayant une phase de -180° et un gain de 1 soit $0dB$. Le point critique est donc $z_{c, \text{Black-Nichols}} = (-180, 0)$ par convention (la phase n'est pas unique). Si le tracé du Lieu entre -360 et 0 degrés (par convention) laisse **le point critique sur sa gauche** alors le système **est stable** en boucle fermée pour un gain unitaire.

À la figure 7.21 on voit le point critique au centre du diagramme entourée de courbes appelées iso-gains. Ces courbes représentent le gain en ω de la fonction de transfert en boucle fermée (retour unitaire) lorsque l'arc que forme le lieu de Black les intersectent au point $(x(\omega), y(\omega)) \in \Gamma$.

FIGURE 7.21 – Diagramme de Black-Nichols de $F(s)$.

c) Abaque de Black



Je tire une partie des explications et des graphismes de cette partie du site de Robert Papanicola [Papanicola, 2019], nous encourageons le lecteur à le visiter, doté d'un module $\text{\LaTeX}$ (utilisant `Tikz`) qui m'a grandement aidé pour le tracé d'un lieu vectorisé.

On peut complètement prédire la réponse fréquentielle d'un système en boucle fermée de fonction $H(s)$ à l'aide des diagrammes de Black, si :

- Le système en boucle ouverte $F(s)$ a été étudié dans l'espace fréquentiel ;
- Le système en boucle fermée résulte d'un bouclage de $F(s)$ sur un compensateur proportionnel à gain unitaire $K = 1$.

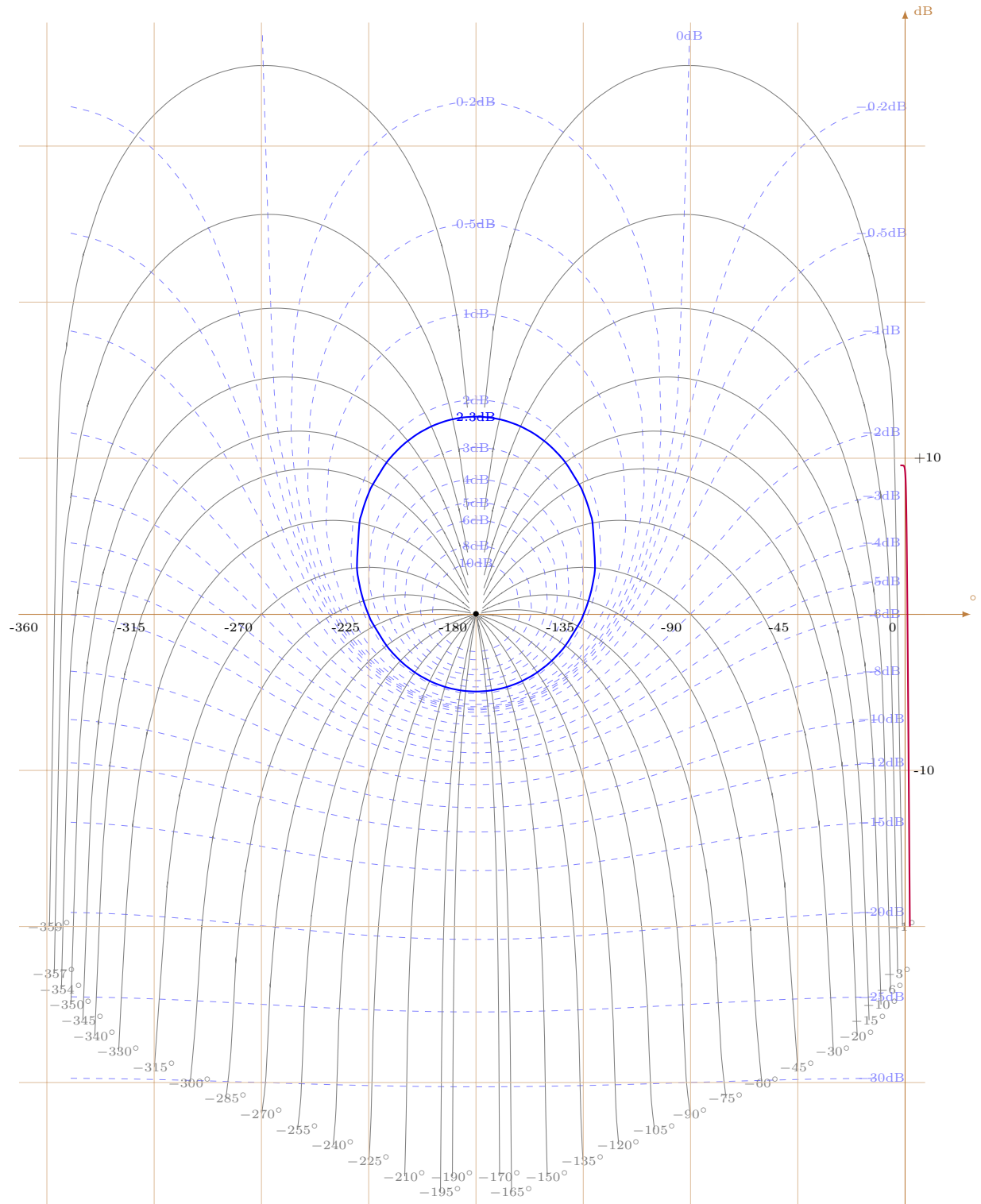
Idée : on remarque que :

$$H(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)} = \frac{\xi}{1 + \xi} = f(\xi).$$

La fonction complexe $f(\xi)$ donne le comportement en boucle fermée du système en fonction du comportement en boucle ouverte de ce dernier. On trace les iso-gains

de cette fonction $|f(\xi)|_{dB} = k$ et les iso-phases $\varphi(f(\xi)) = \lambda$ dans le lieu de Black-Nichols, en prenant différentes valeurs de k et λ suffisamment proches. On obtient un réseau d'arcs paramétrés constants indépendant de la variable ξ , c'est-à-dire de la fonction de transfert en boucle ouverte F .

Par conséquent, le maillage du lieu est un tracé constant, calculable *a priori* et utilisable pour prédire le comportement du système en boucle fermée (et donc l'allure de la fonction de transfert $H(s)$). **La réponse fréquentielle en boucle fermée** est approchable par les intersections des arcs $|f(\xi)|_{dB}$ et $\phi(f(\xi))$, représentées sur l'abaque en figure 7.22 **les plus proches** du tracé du lieu de Black-Nichols en boucle ouverte.



III Compensateurs fréquentiels

Maintenant que nous sommes munis d'outils d'analyse nous pouvons dès lors concevoir des compensateurs utilisant ces méthodes.

III.A Cahier des charges fréquentiel

Ici, on travaille à conception en deux étapes essentiellement : des spécifications en régime permanent parmi lesquelles l'écart statique e_{ss} et également les spécifications transitoires parmi lesquelles les oscillations et la rapidité.

Nous supposons un système $F(s)$ dont on connaît la réponse fréquentielle (lieux de Bode et/ou de Black) et un compensateur $C(s)$ muni d'un gain statique K qui reste à concevoir. Nous présentons le système bouclé générique unitaire à la figure 7.23.

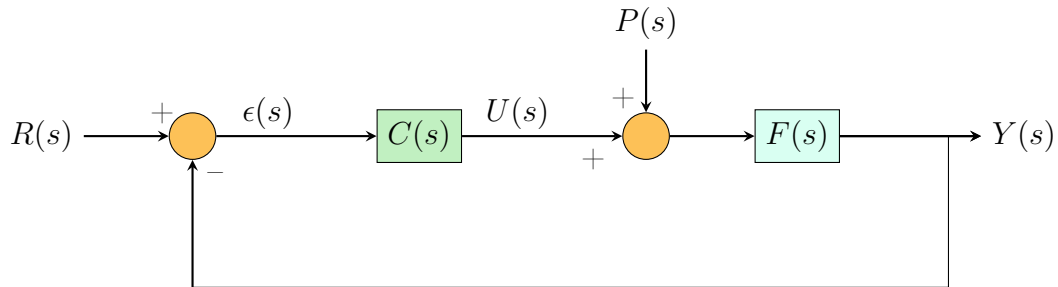


FIGURE 7.23 – Système générique à retour unitaire.

On suppose $C(s)$ de la forme générique suivante :

$$C(s) = K \frac{N(s)}{D(s)}, \text{ avec } \deg(N) < \deg(D)$$

On supposera également que F dispose d'un gain statique K_0 connu.

a) Performances en régime permanent

En régime permanent, nous pouvons ici calculer grâce au gain statique K et K_0 on peut exprimer l'erreur en fonction du signal d'entrée grâce au **théorème de**

la valeur finale. Ainsi, si on spécifie l'écart statique désiré e_{ss}^d on peut trouver K facilement. Toutefois, cette approche proportionnelle du problème n'annule pas l'erreur et peut rendre instable le système, nécessitant pour le dernier point d'ajouter un étage fréquentiel au compensateur.

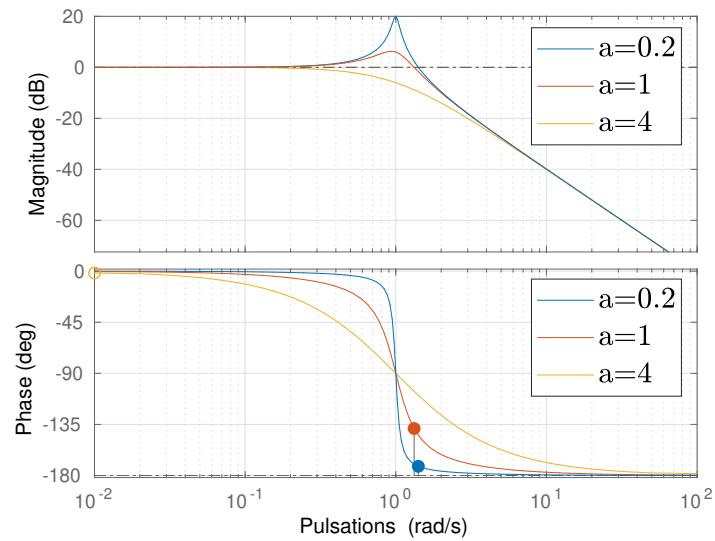
Rôle de la marge de gain : La marge de gain est en fait la marge qu'il nous reste pour régler K en décibels avant de rendre le système instable. Par exemple une marge de gain de 3 décibels signifie que si on boucle le système avec $K_{dB} = 3 \text{ dB} \Leftrightarrow K \approx 1.41$ alors il deviendra instable en boucle fermée. C'est [la marge de réglage de gain](#) autorisée avant l'instabilité que nous voulons éviter en tout cas.

b) Performances en régime transitoire

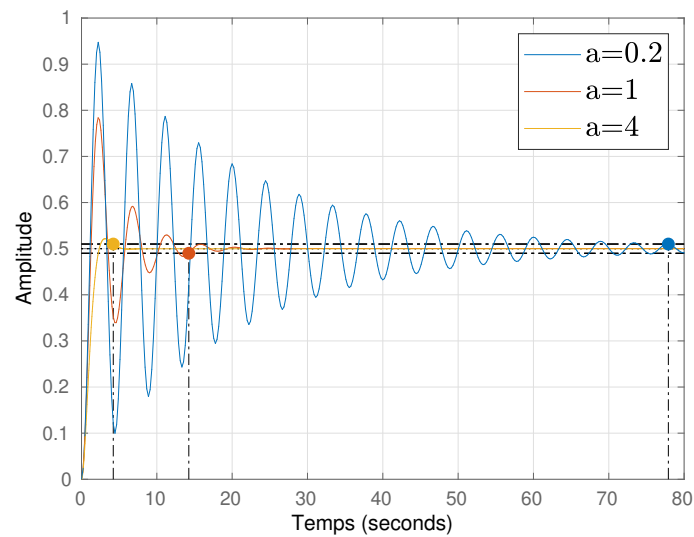
La marge de phase nous donne un critère qualitatif de la forme de réponse attendue pour le bouclage d'un système asservi. Une faible marge de phase est synonyme d'un système faiblement amorti avec pour conséquence un temps d'amortissement élevé.

Pour donner l'illustration de nos propos, nous avons paramétré un système générique $F_a(s) = \frac{1}{s^2 + 2as + 1}$ bouclé avec un gain unitaire $C(s) = 1$, trois fonctions F_a sont testées à la figure 7.24. On remarque que plus le système est oscillant plus la marge de phase, visible sur le diagramme de Bode en Phase, s'amoindrit (ses valeurs sont 180, 43 puis 10 degrés) et plus la réponse temporelle à 5% est longue à obtenir pour les valeurs que nous avons choisies ici.

Il faut donc veiller à obtenir une marge de phase suffisamment grande pour éviter ce type de phénomènes.



(a) Diagrammes de Bode avec marges de phase.



(b) Réponses temporelles associées.

FIGURE 7.24 – Illustration du lien entre amortissement et marge de phase.

III.B Compensateur à avance de phase

a) Présentation

Un **compensateur à avance de phase** (Compensateur à Avance de Phase (CAAP)) est un système paramétré par un temps caractéristique τ , un gain K , et un paramètre adimensionnel $\alpha > 1$ et ayant pour fonction de transfert :

$$C(s) = K \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}.$$

Cette fonction de transfert est facilement réalisable à l'aide de composants électroniques usuels (condensateurs et amplificateurs par exemple) c'est pour cela qu'elle était largement employée au siècle précédent et perdure encore aujourd'hui.

Remarque : Il s'agit d'une forme approchée du contrôleur Proportionnel-Dérivé, qui n'est pas réalisable physiquement. $s = j\omega$ si ω est petit, alors, on peut négliger τs devant 1 mais si α est suffisamment grand on peut considérer le produit $\alpha\tau s$ comme non-négligeable devant 1 et ainsi obtenir :

$$C(s) \approx K(1 + \alpha\tau s).$$

Il s'agit d'une approximation d'un PD en basse fréquence.

b) Conception

Supposons qu'on ait une marge de phase M_φ et qu'on désire l'augmenter pour une marge de phase M_φ^d .

Idée : On veut placer la «bosse» de phase du CAAP sur la pulsation définissant la marge de phase pour améliorer cette dernière, jugée trop petite par le concepteur.



Propriété 7.2 : Paramétrage de la bosse de phase Le maximum de phase ϕ_M du CAAP sera réalisé en $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau}$ et $\phi_m = \phi_{CAAP}(\omega_{max}) = \arcsin(\frac{\alpha-1}{\alpha+1})$.

Le correcteur présente un gain $G_{C,dB}(\omega_{max}) = 10 \log(\alpha)$ à la pulsation du maximum.

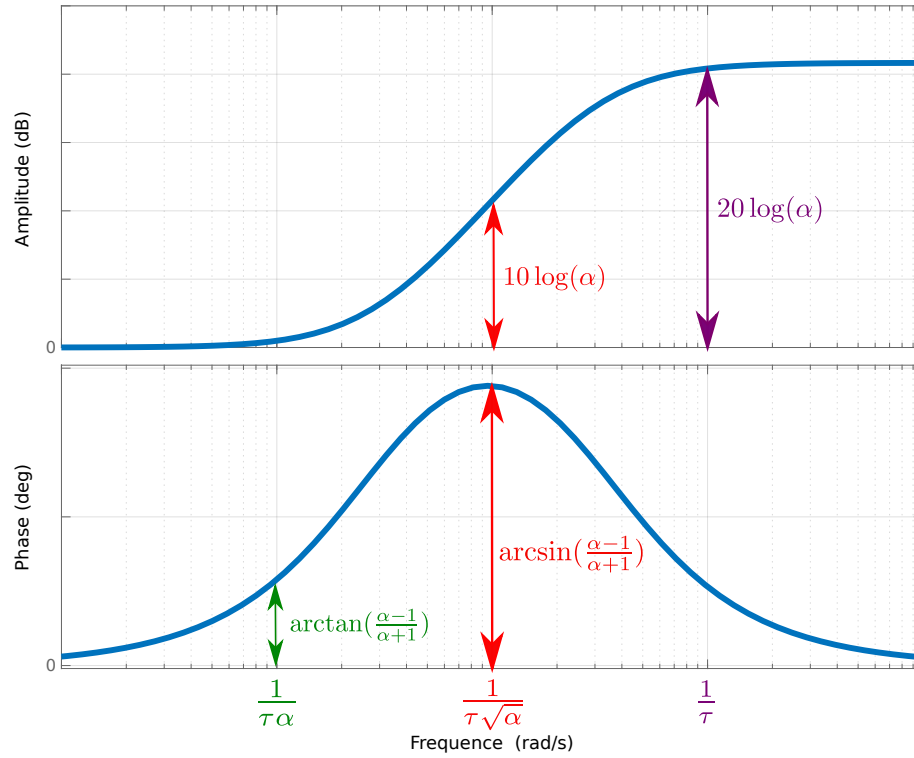


FIGURE 7.25 – Diagrammes de Bode d'un CAAP

Méthode de réglage itérative :

- i) Tracer le diagramme de Bode du système en boucle ouverte $F(s)$, en déduire la marge de phase initiale M_φ et noter ω_ϕ .
- ii) En déduire la taille de la bosse de phase à produire pour le CAAP. Il s'agit en d'autres termes du déficit de marge de phase à compenser :

$$\Delta_\varphi = M_\varphi^d - M_\varphi.$$

- iii) En déduire α :

$$\alpha = \frac{\sin(\Delta_\varphi) + 1}{1 - \sin(\Delta_\varphi)}.$$

iv) Faire en sorte que $\omega_{max} = \omega_\phi$ en choisissant :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_{max}}.$$

v) Compenser le gain introduit à la pulsation précédente, afin de ne pas altérer ω_ϕ du système physique, en choisissant :

$$K_{dB} = -10 \log(\alpha) \Rightarrow K = 10^{K_{dB}/20}.$$

vi) (idéalement) Tracer le diagramme de Bode du système $F(s)C(s)$ pour se vérifier. Et vérifier les performances en régime permanent, si elles sont dégradées recommencer à l'étape i).

Méthode de réglage approchée [Malhamé, 2016] :

- i) On suppose que $K = \frac{1}{\alpha}$. Cette méthode diffère par le fait que K n'est plus à régler de manière itérative pour respecter les spécifications en régime permanent.
- ii) Tracer le diagramme de Bode du système en boucle ouverte $KF(s)$, en déduire la marge de phase initiale M_ϕ et noter ω_ϕ . On calcule ici encore $\Delta_\phi = M_\phi^d - M_\phi$.
- iii) On définit la fréquence $\omega'_\phi = \frac{\omega_\phi}{10}$. Et on calcule α en conséquence :

$$\alpha = \frac{\tan(\Delta_\phi) + 1}{1 - \tan(\Delta_\phi)}.$$

iv) On choisit τ tel que :

$$\tau = \frac{1}{\alpha\omega_\phi}.$$

- v) L'atténuation en gain est ici de l'ordre de $-3dB$, ce qui est négligeable et qui pousse à ne pas ajuster le gain K de nouveau.
- vi) (idéalement) Tracer le diagramme de Bode de $F(s)C(s)$ pour vérifier les spécifications fréquentielles.

Exemple 7.8 : Conception d'un CAAP par méthode itérative Soit le système (trop oscillant, $\xi = 0.05$!) qui suit :

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 0.1s + 1},$$

on souhaite concevoir un CAAP qui fait en sorte que $e_{ss} = 10\%$ et que $M_\phi = 45^\circ$.

Tout d'abord, trouvons le gain K permettant de satisfaire $e_{ss} = 10\%$, en utilisant le théorème de la valeur finale on obtient que :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{KF(s)}{K(s)F(s) + 1} - 1 \right] = \frac{1}{1 + K},$$

$$e_{ss} = 0.1 \Rightarrow K = 9.$$

Traçons à présent les diagrammes de Bode de $KF(s)$, ils sont visibles en figure 7.26.

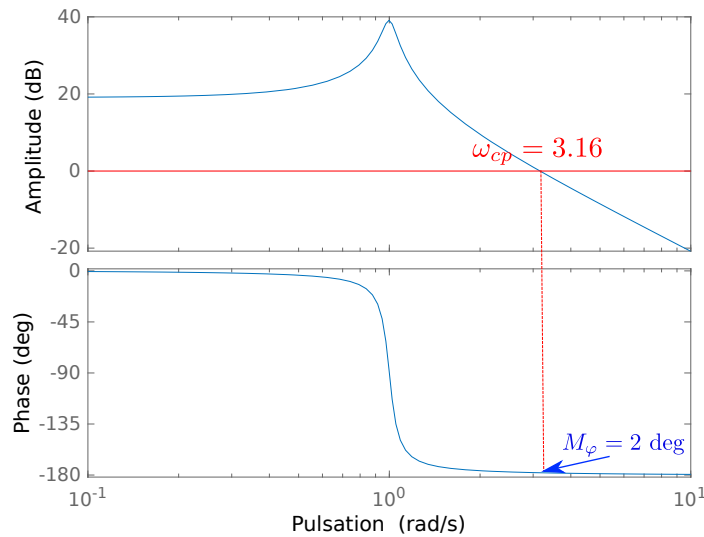


FIGURE 7.26 – Diagrammes de Bode de $KF(s)$.

L'étude du diagramme nous donne $M_\varphi = 2^\circ$ donc le manque à gagner est de $\Delta_\varphi = 43^\circ$. Ainsi :

$$\alpha = \frac{\tan(\Delta_\varphi) + 1}{1 - \tan(\Delta_\varphi)} = 28.6,$$

également $\tau = \frac{1}{\alpha\omega_{cp}} = 0.011$.

Ceci nous donne les diagrammes de Bode du système corrigé (figure 7.27) ainsi que les réponses temporelles avant et après compensation.

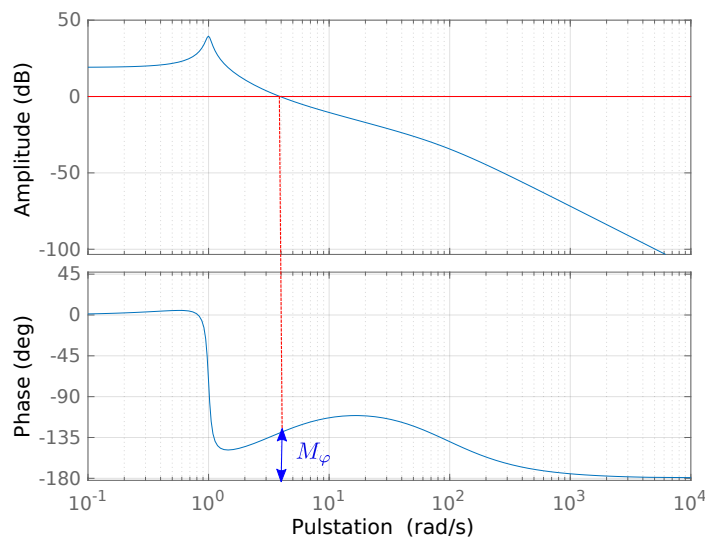


FIGURE 7.27 – Diagrammes de Bode de $C(s)F(s)$.

Sur la figure 7.27 on peut lire que $M_\varphi \approx 50^\circ$ après compensation, ce qui est normal au vu des approximations entreprises. Le résultat est cependant acceptable, comme nous pouvons le voir à la figure 7.28 en comparaison au bouclage proportionnel seul.

III.C Compensateur à retard de phase

a) Présentation

Un **compensateur à retard de phase** (**Compensateur à Retard de Phase (CARP)**) est un contrôleur de fonction de transfert identique au compensateur à

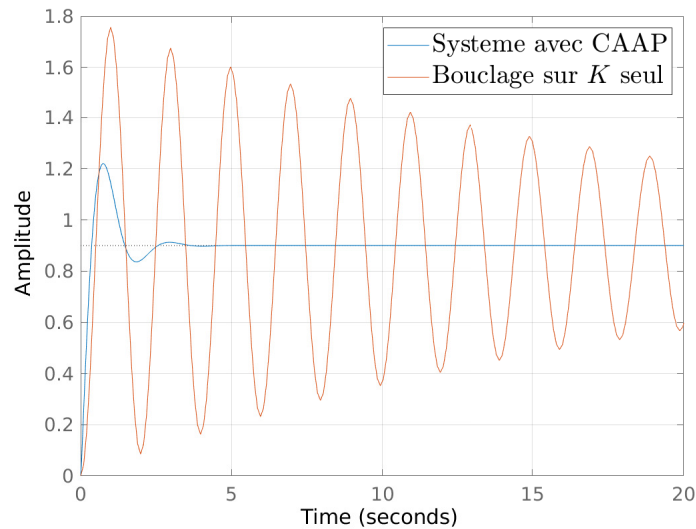


FIGURE 7.28 – Réponses temporelles du système en boucle fermée.

avance de phase sauf que le coefficient qui vient paramétrer l'excroissance de phase $\beta > 1$ se trouve au dénominateur.

$$C(s) = K \frac{1 + \tau s}{1 + \beta \tau s}$$

Il est également réalisable avec des composants usuels.

Remarque : Logiquement, il s'agit ici d'une valeur approchée du contrôleur Proportionnel-Intégral pour des fréquences faibles.

Ce dernier permet d'augmenter la précision d'un système mais détériore sa stabilité puisqu'il introduit un déficit de marge de phase. Généralement, il est employé avec un **CAAP** en série.

b) Conception

Supposons que nous voulons une marge de phase M_φ^d et une erreur statique e_{ss}^d .

Idée : On va essayer d'ajuster le gain

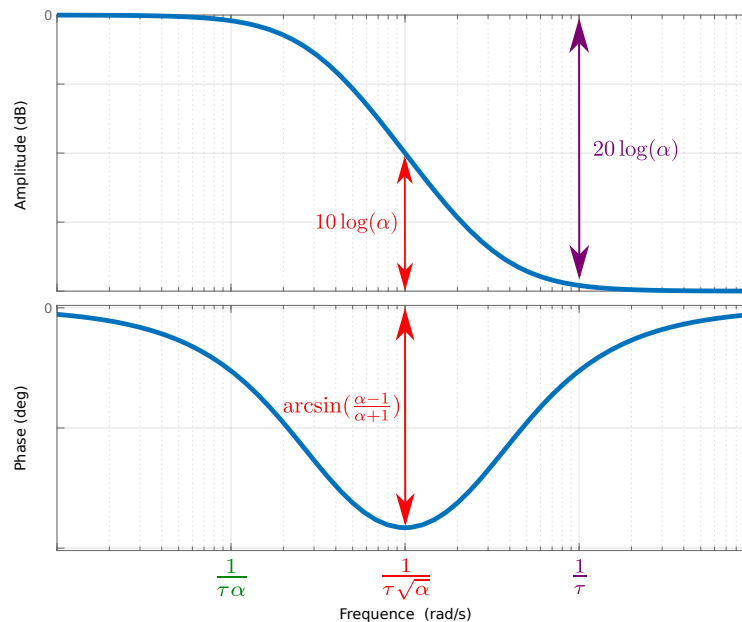


FIGURE 7.29 – Diagrammes de Bode d'un CARP.

- i) Ajuster le gain K à l'aide du théorème de la valeur finale afin d'obtenir e_{ss}^d comme erreur finale.
- ii) Après application dudit gain, déterminer la nouvelle marge de phase M_φ du système en boucle ouverte en traçant les diagrammes de Bode.
- iii) Déterminer graphiquement la pulsation ω_C définie telle que :

$$\varphi(\omega_C) = -180^\circ + M_p^d + 5^\circ.$$

L'ajout de 5 degrés est en fait une «ruse» pour compenser les cinq degrés que nous perdrons par l'adjonction du CARP.

- iv) Relever sur le graphique $G_C = G_{KF(s),dB}(\omega_C)$ et paramétrer β grâce à G_C :

$$20 \log(\beta) = G_C \Rightarrow \beta = 10^{\frac{G_C}{20}}.$$

- v) On doit placer $\frac{1}{\tau}$ à gauche de ω_C afin de ne pas perturber la compensation, si on choisit la décade inférieure on perd environ cinq degrés en phase, d'où notre

«ruse». :

$$\tau = \frac{10}{\omega_C}.$$

vi) (idéal) vérification par nouveaux diagrammes de Bode de $C(s)F(s)$.

Exemple 7.9 : Conception d'un CAAP Concevoir un compensateur CAAP pour le système en boucle ouverte suivant :

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)},$$

avec les performances suivantes $M_\varphi = 45^\circ$ et $e_{ss} = 2\%$.

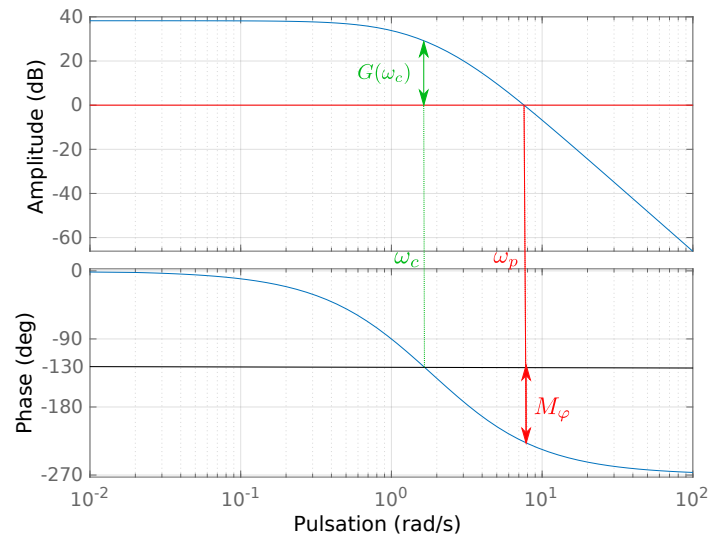
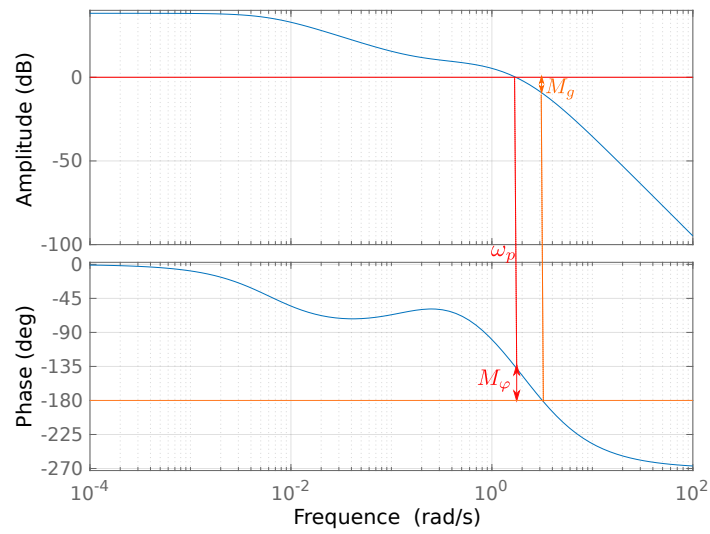
Les spécification en régime permanent nous donnent :

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K} = 0.02 \Leftrightarrow K = 49.$$

On trace les diagrammes de Bode de $KF(s)$ à la figure 7.30. En résulte $M_\varphi = -46^\circ$ à la pulsation $\omega_{cp} = 7.6$ rad/s, ce qui justifie notre asservissement (le système est instable en boucle fermée). On note aussi ω_c qui est telle que $\phi(\omega_c) = -180 + M_\phi^d + 5 = -130^\circ$ et $\omega_C = 1.7$ rad/s, le gain à cette pulsation vaut $G_{dB}(\omega_C) = 29.7$ dB.

Ainsi $\beta = 10^{G_{dB}(\omega_C)/20} = 27.2$ et $\tau = \frac{10}{\omega_c} = 5.84$ s. On applique le correcteur et on voit les résultats fréquentiels sur la figure 7.27.

On remarque que $M_\phi = 44.3^\circ$ après compensation, ce qui est convenable. De plus on remarquera que $M_g > 0$, le système est stable. Nous voyons la réponse temporelle du système en boucle fermée à la figure 7.32.

FIGURE 7.30 – Diagrammes de Bode de $KF(s)$.FIGURE 7.31 – Diagrammes de Bode de $C(s)F(s)$.

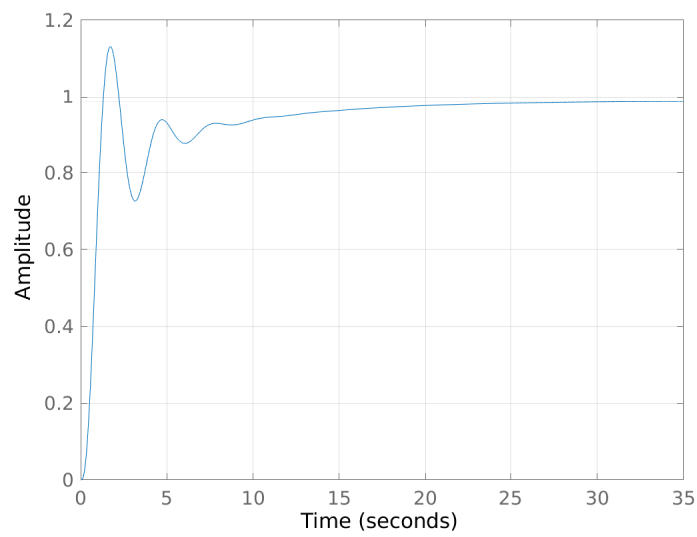


FIGURE 7.32 – Réponse temporelle du système compensé en boucle fermée.

IV Réglages de Ziegler-Nichols pour un PID ★

À présent, faisons un peu d'histoire pour finir ce chapitre sur la commande fréquentielle. Nous abordons ici une méthode empirique utilisant des mesures fréquentielles pour régler une famille de compensateurs bien connus.

Histoire et utilité : Pendant la Seconde Guerre Mondiale, les américains Ziegler et Nichols ont établi une méthode expérimentale de réglage des compensateurs classiques au niveau du temps de réponse et de la stabilité de ces derniers [Ziegler and Nichols, 1942]. Afin de procéder à cette méthode, nous étudierons le système présenté en figure 7.6.

Supposons que nous ne connaissons pas *a priori* notre système F .

On peut cependant lui envoyer des signaux $r(t)$ en boucle fermée, avec un gain K et analyser ce qu'il se passe en sortie $y(t)$.

Analyse du système : Tout d'abord, on choisit un gain K proche de zéro qu'on augmente graduellement. Le gain K à partir duquel le système devient instable en boucle fermée est noté K_u . La période d'oscillation du signal proche de K_u s'il y a lieu sera notée T_u .

Réglage du système : Pour $C(s)$ compensateur Proportionnel, Proportionnel-Intégral, Proportionnel-Dérivé ou Proportionnel-Intégral-Dérivé, on applique les gains présents dans la table 7.1 afin d'obtenir un réglage convenable.

TABLE 7.1 – Table des gains de la méthode de Ziegler-Nichols

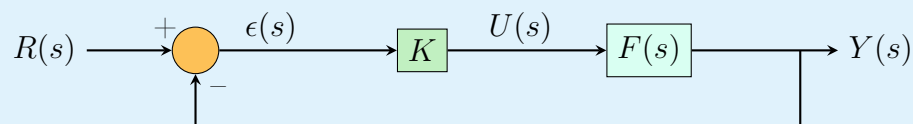
Contrôleur	K_p	K_i	K_d
P	$0.5K_u$	•	•
PI	$0.45K_u$	$T_u/1.2$	•
PD	$0.8K_u$	•	$T_u/8$
PID	$0.6K_u$	$T_u/2$	$T_u/8$

Ces gains ont été obtenus de manière empirique afin de fournir des valeurs convenables de performances (temps de réponse, valeur de la commande et oscillations raisonnables) pour un système assimilable à un système d'ordre deux.

Cette méthode a été utilisée massivement dans l'industrie et perdure de nos jours car elle ne nécessite que peu d'information sur le système afin de fonctionner. Cependant, les systèmes traités par cette méthode sont des systèmes supposés stabilisables par simple bouclage proportionnel, ce qui est une hypothèse forte.

L'étudiant(e) moderne est capable, à l'aide de logiciels comme **Matlab** ou **Python** d'identifier de manière fiable la fonction de transfert d'un système à l'aide d'une réponse indicielle comme nous l'avons vu précédemment. Et ainsi, elle ou il peut concevoir un asservissement plus adéquat, disposant d'informations fiables.

Exemple 7.10 : Système mystère Soit le système physique suivant de fonction de transfert inconnue avec un gain ajustable K .



On applique un échelon à l'entrée et on augmente le gain K jusqu'à obtenir des oscillations. On note le gain obtenu empiriquement K_u . Pour illustrer cet exemple, nous avons repris le système étudié de fonction $F(s)$ donné pour l'exemple du **CARP**, mais nous ne sommes pas supposés connaître la fonction de transfert.

Le seul élément dont nous disposons est qu'en augmentant le gain graduellement, on a trouvé $K_u = 6.3$ et qu'on a alors pu observer les oscillations de la figure 7.33.

On trouve que $T_u = 0.05$ s. Si on souhaite appliquer une correction Proportionnelle-Dérivée, utilisant les règles de la table 7.1 on obtient :

$$K_p = 5.04, \quad K_d = 0.0063,$$

et on obtient la réponse temporelle à la figure 7.34.

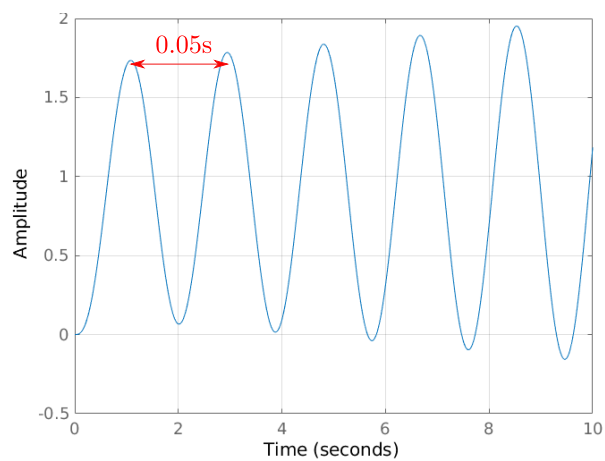


FIGURE 7.33 – Essai de pompage : détermination de K_u et T_u .

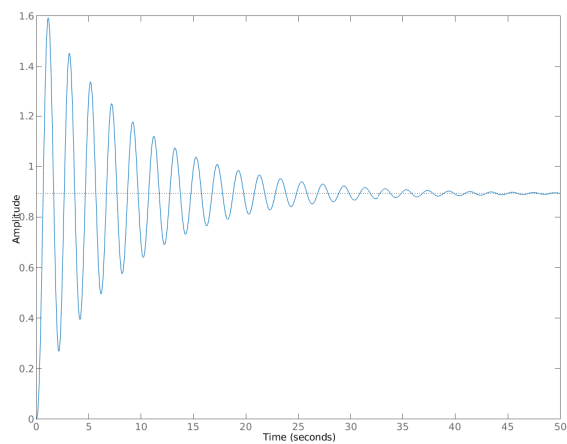


FIGURE 7.34 – Système bouclé avec un contrôleur PD.

On remarque que le système, bien que stable, est réglé de manière agressive en terme de dépassement. Ce réglage est plus une heuristique qu'un réglage rigoureux : les méthodes de type fréquentiel, bien qu'ignorant un certain nombre de paramètres demeurent à cet égard plus exactes qu'un simple essai de pompage. Encore faut-il caractériser le système de manière harmonique : une méthode élaborée de conception requiert une meilleure paramétrisation du problème.

Remarque : Pour appliquer la méthode, le système doit de surcroît avoir une topologie de lieu des racines qui lui permette d'osciller lorsqu'on augmente le gain. Cette technique est appelée **essai de pompage**.

Introduction à la commande moderne

Dans les années cinquante, avec le développement des programmes spatiaux, la conception par fonction de transfert (et *a fortiori* fréquentielle) devint insuffisante pour régler des problèmes multivariables et avec des paramètres variant dans le temps.

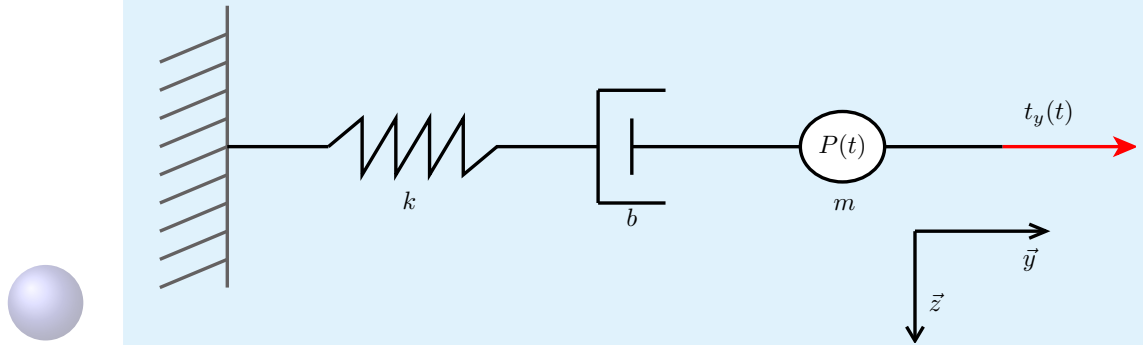
Pour citer un exemple de problématique, une fusée voit sa masse diminuer au fur et à mesure de la combustion de son carburant. Or, les lois de la mécanique sont fonctions de la masse du système, ce qui pose un problème conceptuel si on souhaite contrôler son orientation ou sa position. Le système devient donc multivariable et voit ses paramètres évoluer en fonction du temps.

En revenant à une formulation du problème sous forme d'équations différentielles temporelles et à l'aide d'algorithmes de résolution implémentables sur ordinateur nous pouvons résoudre le problème d'asservissement en temps réel. Nous donnons un aperçu de ces méthodes le long de ce chapitre.

I Espace d'état

La commande moderne est dépendante de ce que l'on appelle un **espace** d'état. Prenons un exemple pour mieux comprendre le concept.

Exemple 8.1 : Système masse-ressort à amortisseur Soit le système masse-ressort à amortissement suivant :



On souhaite asservir la position de la masse $P(t) = p_y(t)\vec{y}$ grâce à la force de tension d'un fil $\mathbf{t} = t_y\vec{y}$, la masse est supposée être ponctuelle et de valeur m . La force du rappel du ressort se note $\mathbf{f}_r = -kp_y\vec{y}$ si on suppose que le point d'équilibre du ressort est situé en $y = 0$. La force de l'amortisseur est proportionnelle à la vitesse et opposée à la tension de la corde $\mathbf{f}_a = -b\dot{p}_y\vec{y}$. On suppose que le poids $m\mathbf{g}$ du système possède une composante sur $\vec{z}$ seulement.

D'un point de vue sémantique, un état est en fait un ensemble d'informations décrivant un système. En automatique, les états sont définis en fonction du problème que nous voulons résoudre.

Ici c'est un contrôle de position $P(t)$ grâce à une force $t_y(t)$. La physique du problème fait intervenir l'équation de Newton :

$$m(t)\ddot{\mathbf{P}}(t) = m\mathbf{g} + \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_r + \mathbf{t}.$$

La masse est supposée translater que sur l'axe $\vec{y}$, on projette donc l'équation précé-

dente sur cet axe. On obtient l'équation dynamique suivante :

$$\ddot{p}_y = -\frac{b}{m}\dot{p}_y - \frac{k}{m}p_y + t_y. \quad (8.1)$$

Une représentation d'état possible est :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_y \\ \dot{p}_y \end{bmatrix},$$

le vecteur d'état $\mathbf{x}$ comporte toutes les informations utiles et dynamiques pour notre problème d'asservissement.



On dit «une» et non pas «la» représentation car il peut en exister plusieurs suivant les états que l'on choisit et l'ordre des variables...

Remarque : Avant de vous aventurer dans ce chapitre, familiarisez-vous avec les notations de l'annexe 3.

I.A Représentation d'état de Kalman

Soit un vecteur d'état $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ à N composantes décrivant un système et régi par une équation différentielle vectorielle d'ordre un et soumis à une commande $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^P$ à P composantes. Soit un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ à M composantes représentant des variables mesurables à la sortie dudit système. **La représentation de Kalman** du système s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (8.2)$$

Les matrices $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{N,P}(\mathbb{R})$, $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{R})$, $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_{M,P}(\mathbb{R})$ sont ici à coefficients constants et décrivent les équations vectorielles représentant le problème.



Exemple 8.2 : Système masse-ressort... le retour On suppose que le système est maintenant équipé d'un télémètre laser donnant en tout temps la position exacte $\tilde{p}_y(t) = p_y(t)$.

Curieux, le technicien du laboratoire s'amuse à brancher une génératrice tachymétrique donnant une tension $v(t) = \alpha \dot{p}_y$ sur la bobine du fil. Malheureusement, cette dernière a tendance à se décaler d'un biais proportionnel à l'effort, et la vraie tension vaut $\tilde{v}(t) = \alpha \dot{p}_y(t) + \beta t_y(t)$.

Donner la représentation de Kalman du système décrit dans les deux premiers exemples de ce chapitre.

Premièrement, on va établir l'équation du système physique à l'aide de (8.1). Si $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_y & \dot{p}_y \end{bmatrix}^T$ on peut écrire et identifier :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_y \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} p_y \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{t_y(t)}_{\mathbf{u}(t)}$$



La dernière ligne de cette équation matricielle est tout simplement une traduction vectorielle de (8.1). $u(t)$ est l'entrée du système.

Pour les mesures $\mathbf{y}$ il suffit d'écrire sous forme matricielle les équations qui les lient d'après l'énoncé de l'exemple précédent :

$$\mathbf{y}(t) := \begin{bmatrix} \tilde{p}_y(t) \\ \tilde{v}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} p_y \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} t_y(t)$$

I.B Lien avec les fonctions de transfert dans le domaine de Laplace

On se donne une représentation de Kalman générique composée des vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$ et des matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. L'équation d'état vaut :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

On se place dans des conditions d'Heaviside, c'est-à-dire que nous supposons que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Dans ce cas-là on peut écrire la transformée de Laplace de l'équation d'état comme suit :

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s).$$

Nous pouvons réorganiser cette équation et obtenir :

$$\mathbf{x}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s), \quad (8.3)$$

où la matrice $\mathbf{I} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice identité de même dimension que $\mathbf{A}$.

L'équation de sortie vaut :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

sa transformée de Laplace dans des conditions d'Heaviside peut s'exprimer ainsi :

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s)$$

On peut substituer (8.3) dans l'équation précédente et ainsi obtenir :

$$\mathbf{y}(s) = (\mathbf{C} [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \mathbf{u}(s)$$

Par analogie avec le cas monovarié, la **fonction de transfert** (« $F = Y/U$ ») d'un système linéaire s'écrit ainsi :

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C} [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (8.4)$$



Propriété 8.1 : Pôles d'un système décrit par sa représentation d'état
 Les **valeurs propres** de la matrice $\mathbf{A}$ sont les pôles du système étudié.

Par conséquent si on définit $\chi_{\mathbf{A}}$ le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$ comme :

$$\chi_{\mathbf{A}}(s) = \det(\mathbf{A} - \mathbf{I}s),$$

les pôles p_i d'un système seront définis comme étant les racines de $\chi_{\mathbf{A}}$.

I.C Systèmes commandables

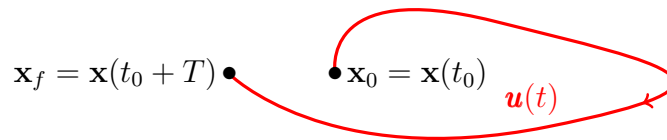
a) Notion de commandabilité



Un système est **commandable** *si et seulement* s'il existe une **commande d'énergie finie** qui le mène d'un état à un autre.

Mathématiquement, supposons qu'un système (Σ) prend la commande $\mathbf{u}(t)$ en entrée et délivre un état $\mathbf{x}(t)$ en sortie. Soit l'état initial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{E}$ avec $\mathbb{E}$ l'espace d'état, on veut amener le système grâce à une commande $\mathbf{u}(t)$ dans un état final quelconque $\mathbf{x}_f \in \mathbb{E}$ durant une durée donnée quelconque T :

$$(\Sigma) \text{ commandable} \Leftrightarrow \forall \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f, T\} \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \mathbb{R}^+, \exists \mathbf{u}(t) < \infty, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_f.$$



b) Critère de commandabilité

On définit la **matrice de commandabilité** $\mathbf{M}_c$, supposons un système $(\Sigma) = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ avec un vecteur d'état $\mathbf{x}$ de dimension N . La matrice de commandabilité d'un tel système vaudra :

$$\mathbf{M}_c := \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Théorème 4 (Critère de commandabilité de Kalman). *Le système (Σ) est commandable **si et seulement si** sa matrice de commandabilité $\mathbf{M}_c$ est de **rang plein**.*

$$\text{rang}(\mathbf{M}_c) = N,$$

*en particulier, si $\mathbf{M}_c$ est une matrice carrée, cette dernière est de plein rang **si et seulement si** :*

$$\det(\mathbf{M}_c) \neq 0.$$



Exemple 8.3 : Le reretour du système masse-ressort... Est-ce que ce dernier est commandable ?

Tout d'abord calculons $\mathbf{M}_c$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-b}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{-b}{m} \end{bmatrix}.$$

On remarque que $\det(\mathbf{M}_c) = -1$ et donc que le système est commandable puisque $\mathbf{M}_c$ est de plein rang.

c) Équivalence des représentations d'état



Propriété 8.2 : Équivalence entre deux représentations Soient deux représentations $(\Sigma) = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ et $(\Sigma') = \{\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}'\}$. S'il existe une matrice de passage $\mathbf{P}$ carrée et **inversible** (*i.e.* $\det \mathbf{P} \neq 0$) qui satisfait :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{PAP}^{-1}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{PB}, \quad \mathbf{C}' = \mathbf{CP}^{-1},$$

on dit que les deux représentations d'état des systèmes **sont équivalentes**.

Preuve des formules ci-dessus. Supposons que règne le vecteur d'état $\mathbf{x}'$ dans la représentation (Σ') et $\mathbf{x}$ dans la représentation (Σ) . On a $\mathbf{x}' = \mathbf{Px}$, avec $\mathbf{P}$ inversible. On a donc par définition :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}'\mathbf{x}' + \mathbf{B}'\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}', \end{cases} \quad (8.5)$$

on reprend l'équation de base de (Σ) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx}, \end{cases}$$

nous tentons d'obtenir (8.5) pour identifier les matrices. Nous remarquons que $\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}'$ et puisque $\mathbf{P}$ est supposée constante alors $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}}'$:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{AP}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{CP}^{-1}}_{\mathbf{C}'}\mathbf{x}', \end{cases}$$

la première ligne, après multiplication à gauche de $\mathbf{P}$ devient :

$$\dot{\mathbf{x}}' = \underbrace{\mathbf{PAP}^{-1}}_{\mathbf{A}'} \mathbf{x}' + \underbrace{\mathbf{PB}}_{\mathbf{B}'} \mathbf{u}$$

□

Remarque : Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont les mêmes que celles de $\mathbf{A}'$ c'est-à-dire que les deux systèmes ont les **mêmes pôles**. Les deux représentations ont les mêmes propriétés de **commandabilité** (la matrice de passage ne change rien de ceci).

d) Forme compagne commandable

Si le système $(\Sigma) = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ possède une représentation d'état **commandable**, alors s'il est monovariable, sa **forme compagne commandable** existe et a du sens (la représentation sous forme compagne **est équivalente** à la représentation originale $(\Sigma) = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$).

La représentation d'état commandable, pour un **système monovariable** (une entrée et une sortie), est formée de $(\Sigma_{CC}) = \{\mathbf{A}_{CC}, \mathbf{B}_{CC}, \mathbf{C}_{CC}, \mathbf{D}_{CC}\}$ et ses matrices sont de la forme suivante :

$$\mathbf{A}_{CC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{CC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{CC} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{N-1} \end{bmatrix}, \quad d = b_N,$$

où $\forall i \in [0, N-1], \{a_i, b_i, b_N\} \in \mathbb{R}^3$

La famille des coefficients a_i et le coefficient b_n sont ceux de la fonction de transfert du système $F(s)$:

$$F(s) = \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Il s'agit d'une **représentation équivalente** au système de départ (Σ) . La matrice de passage $\mathbf{P}$ existe, est inversible et satisfait :

$$\mathbf{x}_{GG} = \mathbf{P}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}_{GG} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{B}_{GG} = \mathbf{P}\mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_{GG} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1},$$

de plus on peut calculer cette dernière à partir d'un **algorithme** facilement implémentable.

Calcul de la matrice de passage $\mathbf{P}$: on suppose que cette matrice se décompose en n colonnes

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_k & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

Pour calculer cette matrice on applique l'algorithme ci-après :

$$\begin{aligned}
k = N & : \mathbf{p}_N = \mathbf{B}; \\
k = N - 1 & : \mathbf{p}_{N-1} = (\mathbf{A} + a_{N-1}\mathbf{I}_N)\mathbf{B}; \\
k = N - 2 & : \mathbf{p}_{N-1} = (\mathbf{A}^2 + a_{N-1}\mathbf{A} + a_{N-2}\mathbf{I}_N)\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{p}_{N-1} + a_{N-2}\mathbf{B}; \\
k = N - 3 & : \mathbf{p}_{N-1} = \mathbf{A}\mathbf{p}_{N-2} + \mathbf{a}_{N-3}\mathbf{B}; \\
& \text{--- R\'e\'e\'iterer le proc\'ed\'e jusqu'\'a la premi\`ere colonne :} \\
k = 1 & : \mathbf{p}_1 = \mathbf{A}\mathbf{p}_2 + a_1\mathbf{B}.
\end{aligned}$$

L'utilité d'une telle transformation facilite le placement de pôles par retour d'état que nous verrons plus tard dans ce chapitre. C'est une astuce algébriste très pratique, ne coûtant qu'une transformation de base représentée par la matrice de passage sous une hypothèse de commandabilité facile à tester pour le concepteur.



I.D Systèmes observables

a) Notion d'observabilité

Un système est **observable** *si et seulement si* l'information fournie par ses **sorties**, sa **dynamique** et ses **entrées** permettent de reconstituer en **tout temps son état** (toutes ses variables d'état).



Mathématiquement, si on définit un système (Σ) , durant un temps $T < \infty$, disposant d'un état initial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ et d'un état final $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_f$ on a l'équivalence suivante :

$$(\Sigma) \text{ observable} \Leftrightarrow \forall \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f, T\} \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{x}(t) \text{ est calculable, avec } 0 \leq t \leq T \text{ sachant } \{\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)\}.$$

En d'autres termes, si le système est parfaitement caractérisé et n'est pas soumis à des perturbations alors on peut en tout temps déduire son état sachant les entrées et les sorties.

b) Critère d'observabilité

Comme pour la commandabilité, on définit une matrice spécifique. La **matrice d'observabilité** $\mathbf{M}_o$ pour un système $(\Sigma) = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ avec un vecteur d'état $\mathbf{x}$ de dimension N vaudra :

$$\mathbf{M}_o := \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{N-1} \end{bmatrix}.$$

Théorème 5 (Critère d'observabilité de Kalman). *Le système (Σ) est observable si et seulement si sa matrice d'observabilité $\mathbf{M}_o$ est de rang plein.*

$$\text{rang}(\mathbf{M}_o) = N,$$

en particulier, si $\mathbf{M}_o$ est une matrice carrée, cette dernière est de plein rang si et seulement si :

$$\det(\mathbf{M}_o) \neq 0.$$



Exemple 8.4 : Le $(re)^3$ tour du système masse ressort Est-il observable ?
Et sans le télémètre est-ce toujours le cas ?

On va calculer dans le premier cas (tous capteurs allumés) la matrice d'observabilité :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k\alpha}{m} & \frac{-b\alpha}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}.$$

La matrice d'observabilité n'est pas carrée. Pas de panique ! On peut aisément prouver qu'elle est de rang plein : l'indépendance entre les deux vecteurs colonne composant cette dernière est assurée par le fait que $\det(\mathbf{C}) \neq 0$. En effet si le bloc supérieur de $\mathbf{M}_0$ que forme $\mathbf{C}$ est réputé avoir des composantes indépendantes (*ie* un déterminant non-nul), cette matrice a un rang de la dimension dudit bloc, ici c'est 2. Or $N = 2$ la matrice $\mathbf{M}_0$ est de rang 2 ceci prouve l'observabilité si tous les capteurs sont allumés.

Si on éteint le télémètre, on a :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CA} = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha k}{m} & \frac{-b\alpha}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{M}_o$ est carrée et son déterminant $\det(\mathbf{M}_o) = \frac{b\alpha^2}{m} \neq 0$. Le système est observable puisque $\mathbf{M}_o$ demeure de plein rang.

c) Forme compagne observable

Dualité observabilité/commandabilité oblige, on va concevoir une représentation compagne ici également, pour les systèmes monovariabiles.

Si le **système** $(\Sigma) = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ possède une représentation d'état **observable**, alors sa **forme compagne observable** existe et a du sens (les représentations compagne et originale $(\Sigma) = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ sont équivalentes).

La représentation d'état commandable, pour un **système monovariable** (une entrée et une sortie), est formée de $(\Sigma_{CO}) = \{\mathbf{A}_{CO}, \mathbf{B}_{CO}, \mathbf{C}_{CO}, \mathbf{D}_{CO}\}$ et ses matrices sont de la forme suivante :

$$\mathbf{A}_{CO} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{CO} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{CO} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad d = B_N,$$

où $\forall i \in [0, N-1], \{a_i, b_i, b_N\} \in \mathbb{R}^3$

La famille des coefficients a_i et le coefficient b_n sont ceux de la fonction de transfert du système $F(s)$:

$$F(s) = \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Il s'agit d'une **représentation équivalente** au système de départ (Σ). La matrice de passage $\mathbf{P}$ existe, est inversible et satisfait :

$$\mathbf{x}_{CO} = \mathbf{P}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}_{CO} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{B}_{CO} = \mathbf{P}\mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_{CO} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1},$$

de plus on peut calculer cette dernière ligne par ligne comme pour la forme compagne commandable.

On pourra noter que :

$$\mathbf{A}_{CO} = \mathbf{A}_{CC}^\top, \mathbf{B}_{CO} = \mathbf{C}_{CC}^\top, \mathbf{C}_{CO} = \mathbf{B}_{CC}^\top.$$

II Compensation dans l'espace d'état

II.A Placement de pôles par retour d'état

La première méthode consiste à modifier la dynamique du système en introduisant une rétroaction sur l'état. Remarquons que ce n'est plus nécessairement (si $\mathbf{C} \neq \mathbf{I}$ ou $\mathbf{D} \neq 0$) un bouclage sur la sortie mais sur des variables internes. La structure est explicitée à la figure 8.1.

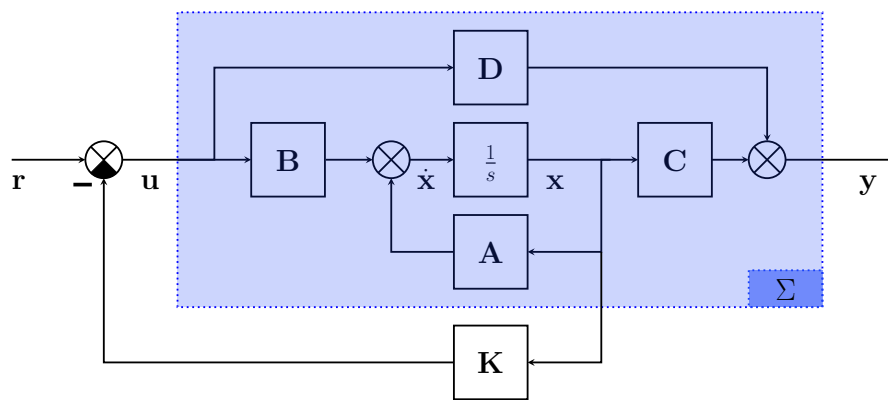


FIGURE 8.1 – Système physique et retour d'état.

a) Placement direct

Sachant que les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont les pôles du système, on peut déterminer la valeur en boucle fermée de $\mathbf{A}_{BF}$ grâce au retour d'état.

Ainsi, à l'aide du schéma de la figure 8.1, on peut constater que le système est bouclé que l'équation qui gouverne $\mathbf{x}$ vaut :

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} = \mathbf{A}_{BF}\mathbf{x}.$$

ainsi, directement, on peut placer les pôles en influant sur $\mathbf{K}$.



Exemple 8.5 : Conception directe Soit un système représenté par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

trouver le gain $\mathbf{K} = [k_1, k_2]$ qui place les pôles en -1 .

Premièrement est-il possible de trouver un tel gain ? Le système est-il commandable ?

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On voit clairement que la première colonne est indépendante de la deuxième ($\det = -2$), oui, nous pouvons placer les pôles (valeurs propres) où bon nous semble.

Calculons :

$$\mathbf{A}_{BF} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 - k_1 & 1 - k_2 \end{bmatrix}$$

rappelons-nous que la somme des valeurs propres est la trace. On veut $p_1^d = p_2^d = -1$ donc

$$\text{trace}(\mathbf{A}_{BF}) = p_1^d + p_2^d = -2 := 1 + (1 - k_2) = 2 - k_2.$$

ceci donne immédiatement $k_2 = 4$.

Le déterminant est le produit des valeurs propres :

$$\det(\mathbf{A}_{BF}) = p_1^d p_2^d = 1 := -3 - 2(1 - k_1) = -5 - 2k_1.$$

Donc $k_1 = 3$, ainsi :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) Méthode de conception indirecte

Une idée est de passer par la forme canonique commandable pour ne pas être ennuyé par le calcul des valeurs propres en fonction de $\mathbf{K}$. La marche à suivre est la suivante :

1. S'assurer de la commandabilité du système ;

2. Trouver la forme compagne commandable du système que l'on souhaite obtenir à la fin de la compensation ;
3. Trouver la forme compagne commandable du système étudié ;
4. Calculer le gain $\tilde{\mathbf{K}}$ dans la base des formes compagnes (c'est une simple équation linéaire!) ;
5. Calculer la matrice de passage $\mathbf{P}$ entre forme système d'origine et forme compagne commandable ;
6. Calculer $\mathbf{P}^{-1}$, le gain final $\mathbf{K}$ vaut $\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{P}^{-1}$.



Exemple 8.6 : Conception indirecte Reprenons l'exemple précédent pour trouver le gain de rétroaction avec la méthode proposée.

1. La commandabilité a déjà été assurée précédemment.
2. Que vaut le polynôme qui place tout-les pôles en -1 ? Réponse :

$$P(s) = (s + 1)(s + 1) = s^2 + 2s + 1.$$

Ainsi, la matrice suivante (notez la dernière ligne) aura ses valeurs propres toutes égales à -1 :

$$\mathbf{A}_{BF,cc}^d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

3. Les pôles associés à A sont donnés par l'équation suivante :

$$\chi(s) = |\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s - 1 & -2 \\ -1 & s - 1 \end{vmatrix} = (s - 1)^2 - 2 = s^2 - 2s - 1.$$

Pour information : on a $\Delta = 8 > 0$ et $p_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $p_2 = 1 + \sqrt{2}$, notons que p_2 est instable, ce qui justifie la rétroaction.

Les coefficients du polynôme $\chi(s)$ donnent la dernière ligne de la matrice $\mathbf{A}$ en forme compagne commandable :

$$\mathbf{A}_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{cc} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Trouvons $\tilde{\mathbf{K}}$ qui satisfait l'équation suivante :

$$\mathbf{A}_{BF,cc}^d = \mathbf{A}_{cc} - \mathbf{B}_{cc}\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \tilde{k}_1 & 2 - \tilde{k}_2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, on arrive aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} -1 = 1 - \tilde{k}_1 \\ -2 = 2 - \tilde{k}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{k}_1 = 2 \\ \tilde{k}_2 = 4 \end{cases}.$$

5. L'algorithme de calcul de la matrice de passage nous donne successivement avec $a_1 = -2$, coefficient du polynôme caractéristique de A :

$$\mathbf{p}_2 = B \text{ et } \mathbf{p}_1 = \mathbf{A}\mathbf{p}_2 + a_1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. L'inverse de $\mathbf{P}$ peut se calculer ainsi (par la comatrice) :

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{P}} \text{com}(\mathbf{A})^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Et donc :

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

ce qui conclut notre exemple.

Remarque : Dans le cas monovarié les gains $\mathbf{K}$ sont uniques pour un système et des pôles désirés donnés.

c) Méthode d'Ackermann ★

Soit un système $(\Sigma) = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$, **commandable**, monovarié, on voudrait que sa fonction de transfert en boucle fermée ait ses N pôles avec des valeurs données $\mathbf{p}_{BF}$. On ferme la boucle avec un bloc matriciel $\mathbf{K}$ (avec le bouclage $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{x}$) pour obtenir de tels pôles : comment faire pour calculer ce gain matriciel ?

Théorème 6 (Formule d'Ackermann). *Pour tout système $(\Sigma) = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ commandable, si on note $\mathbf{p}_{BF}$ les pôles désirés en boucle fermée, alors le gain matriciel de rétroaction (unique) $\mathbf{K}$ s'exprime comme suit :*

$$\mathbf{K} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_c^{-1} \mathbf{D}_{BF}(\mathbf{A}),$$

où :

- $\mathbf{M}_c$ est la matrice de commandabilité du système ;
- $\mathbf{D}_{BF}(\mathbf{A})$ est le polynôme caractéristique dont les racines sont les pôles désirés ($\forall i \in [1, N], D_{BF}(p_{BF}^i) = 0$) mais appliqué à la matrice $\mathbf{A}$.

Démonstration. Les notes de cours du Pr. Bachelier, annexe C, donnent une bonne démonstration de cette formule [Bachelier, 2017]. $\square$



Exemple 8.7 : Le $(re)^4$ tour du système masse-ressort Calculer le gain matriciel nécessaire pour obtenir des pôles en boucle fermée qui assurent $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\omega_0 = \sqrt{2}$ rad/s.

Tout d'abord on sait (voir exemple précédent) que la matrice de commandabilité vaut :

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}.$$

Son inverse peut être calculé par une méthode de Jordan ou une méthode utilisant les transposées de comatrices (voir cours d'algèbre linéaire), ainsi on trouve ce dernier et il vaut :

$$\mathbf{M}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maintenant, déterminons le polynôme D_{BF} . D'après le cahier des charges $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ce qui veut dire que dans le plan complexe, l'argument des pôles sera égal à $\theta = \frac{\pi}{4}$ en d'autres termes, cela signifie que leur partie imaginaire sera égale en valeur absolue à leur partie réelle. Les pôles sont donc donnés par $p_i = -a \pm ja$, avec $a > 0$.

On suppose que leur partie réelle est négative le concepteur n'aurait sans doute jamais l'idée d'un système instable (!).

La pulsation propre associée au pôle est de $\sqrt{2}$ radians par seconde, cela signifie que le module (rayon par rapport au point origine dans le plan) est égal à $\sqrt{2}$. Or, on remarque que la seule solution de $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$ avec $a > 0$ est $a = 1$.

On recherche les pôles $p_i = -1 \pm j$ racines du polynôme :

$$D_{BF}(x) = (x + 1 - j)(x + 1 + j) = x^2 + 2x + 2.$$

On applique ce dernier à $\mathbf{A}$:

$$D_{BF}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2, \text{ avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \text{ avec } \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \\ \frac{bk}{m^2} & \frac{b^2}{m^2} - \frac{k}{m} \end{bmatrix}.$$

Après un bon calcul, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c^{-1} \mathbf{D}_{BF}(\mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} + 2 & -\frac{b}{m} + 2 \\ \frac{bk}{m^2} - \frac{2k}{m} & \frac{b^2}{m^2} - \frac{2b}{m} - \frac{k}{m} + 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{bk}{m^2} + \frac{b(-\frac{k}{m} + 2)}{m} - \frac{2k}{m} & \frac{b^2}{m^2} + \frac{b(-\frac{b}{m} + 2)}{m} - \frac{2b}{m} - \frac{k}{m} + 2 \\ -\frac{k}{m} + 2 & -\frac{b}{m} + 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2(b-k)}{m} & -\frac{k}{m} + 2 \\ -\frac{k}{m} + 2 & -\frac{b}{m} + 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement le gain en boucle fermée suivant d'après le théorème 6 :

$$\mathbf{K} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_c^{-1} \mathbf{D}_{BF}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \frac{k}{m} - 2 & \frac{b}{m} - 2 \end{bmatrix}.$$

d) Gain de précommande

La dynamique du système est gouvernée par les pôles du système corrigé par la rétroaction d'état fournit un gain $\mathbf{K}$ mais *quid* des erreurs asymptotiques ? En effet, faire cette rétroaction n'assure en rien l'annulation des erreurs lorsque $t \rightarrow \infty$.

L'adjonction d'un gain $\mathbf{H}$ de **précommande** (avant le comparateur) rend ceci possible dans certains cas (erreur asymptotique constante). Supposons que l'on ait :

$$\mathbf{y}(\infty) - \mathbf{y}_r(\infty) = \mathbf{e}_\infty,$$

dans ces conditions il faut calculer le gain $\mathbf{H}$ pour annuler cette erreur. On peut procéder au calcul direct de cette dernière en faisant tendre t vers l'infini et le point d'équilibre atteint dans l'espace d'état en régime permanent.

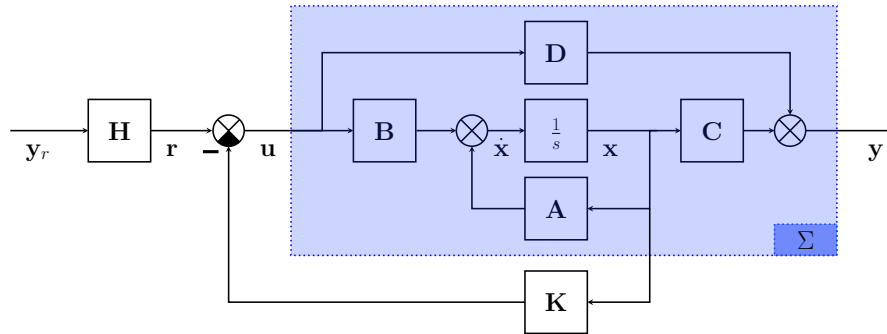


FIGURE 8.2 – Système asservi par retour d'état et gain de précommande.



Exemple 8.8 : Cas monovarié sans action directe Pour un cas monovarié sans action directe de la commande ($D = 0$) et pour une consigne constante, calculer le gain de précommande H qui annule l'erreur en régime permanent.

Tout d'abord, on peut obtenir la fonction de transfert suivante du système en boucle fermée :

$$F_{BF}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}H$$

On suppose que la commande à poursuivre est une constante y_r .

Le théorème de la valeur finale s'applique et donne la contrainte à respecter suivante (erreur nulle) sous réserve de stabilité du système¹ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF_{BF}(s) \frac{y_r}{s} = y_r.$$

On peut réécrire cette contrainte sous la forme $F_{BF}(0) = 1$, ce qui mène à l'égalité suivante pour obtenir une erreur en régime permanent constante :

$$H = \frac{1}{\mathbf{C}(-\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}}.$$

e) Retour d'état intégral

Pour annuler l'erreur en régime permanent, rajouter un intégrateur dans le compensateur et placer un pôle supplémentaire en boucle fermée peut être une solution

1. Si le concepteur a bien fait son travail les pôles sont à gauche...

convenable. Soit $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}_r(t) - \mathbf{y}(t)$ l'erreur de régulation. On peut exprimer l'**erreur intégrale** $\mathbf{e}_y$ comme spécifiée à la figure 8.3.

$$\mathbf{e}_y(t) = \int_{\tau=0}^t \dot{\mathbf{e}}_y d\tau = \int_{\tau=0}^t [\mathbf{y}_r(\tau) - \mathbf{y}(\tau)] d\tau.$$

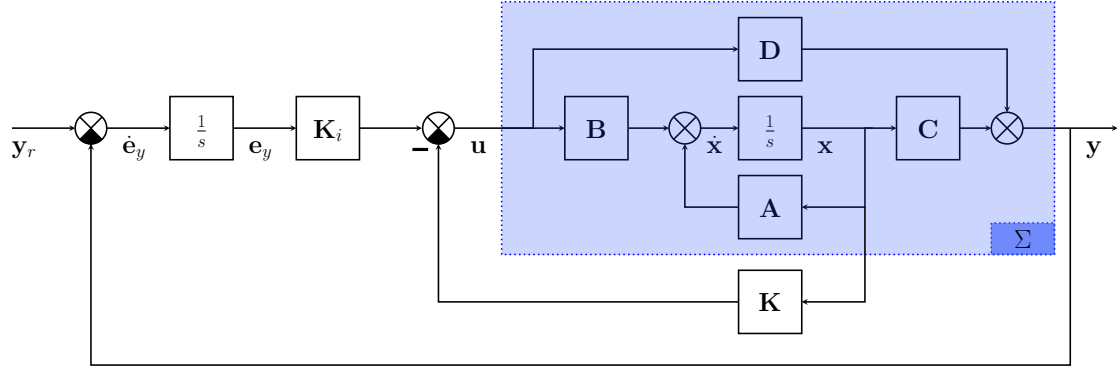


FIGURE 8.3 – Système asservi par retour d'état et action intégrale.

La commande vaut donc :

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_i \mathbf{e}_y - \mathbf{K} \mathbf{x},$$

en faisant ceci, on augmente par conséquent l'état $\mathbf{x}$ qui devient $\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{e}_y \end{bmatrix}^T$, et on obtient en rappelant que m est la dimension de $\mathbf{y}$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ -\mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{y}_r, \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e}_y \end{bmatrix} + \mathbf{D} \mathbf{u}, \end{cases}$$

ce qui donne le système (Σ_a) augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{u}_a \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_a \mathbf{u}_a \end{cases} \quad (8.7)$$

avec :

$$\mathbf{u}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_r \end{bmatrix}, \mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \mathbf{C}_a = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}], \mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Placer les pôles du système (Σ_a) et vérifier les spécifications en régime permanent se fait de façon analogue à un système (Σ) classique vu précédemment. Nous noterons toutefois que nous ne pouvons qu'agir sur $\mathbf{u}$, par conséquent, $\tilde{\mathbf{K}}$ sera déterminé par la paire $(\mathbf{A}_a, \tilde{\mathbf{B}}_a)$ avec :

$$\tilde{\mathbf{B}}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ -\mathbf{D} \end{bmatrix}$$

après une vérification de la commandabilité de ce système, nous pouvons trouver les gains plaçant les pôles du système augmenté où nous le souhaitons avec un gain $\tilde{\mathbf{K}}$. Par retour d'état nous aurons :

$$\mathbf{u} = -\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}_a = (\mathbf{A}_a - \tilde{\mathbf{B}}_a\tilde{\mathbf{K}})\mathbf{x}_a,$$

et donc en partitionnant les gains :

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K}_i \end{bmatrix},$$

avec $-\mathbf{K}_i$ qui correspond à l'opposé du gain présent au schéma 8.3, et respectivement pour $\mathbf{K}$.

II.B Observateurs de Luenberger

a) Structure d'observateur

Dans le cadre de la commande moderne, on se donne la dynamique des états des systèmes étudiés ainsi que leurs observations (les sorties) via des processus dont les équations sont connues. Ainsi, **si le système est observable**, on peut estimer **tous ses états en temps réel** à partir de ses **sorties** et de ses **entrées**. Par exemple, dans le cadre de notre système masse-ressort, on peut estimer la vitesse $\dot{p}_y$ du point mobile sans directement l'observer grâce à la matrice dynamique et la mesure du télémètre.

Cela revient à dire que l'on peut construire un système virtuel, appelé observateur, à partir du système physique qui permet d'estimer le vecteur d'état $\mathbf{x}$, donnant par simulation numérique un estimé $\hat{\mathbf{x}}$ de ce dernier. Ceci permettant de faire un bouclage à retour d'état par la suite avec $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$, l'état $\mathbf{x}$ n'étant, *a priori* pas directement accessible pour effectuer le bouclage dans tous les systèmes linéaires.

Pour un système physique $(\Sigma) = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$, on notera $(\Omega) = \{\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{L}\}$ son observateur d'état. Pour fonctionner (Ω) nécessite les sorties de (Σ) (le vecteur $\mathbf{y}$) ainsi que ses entrées (le vecteur $\mathbf{u}$) et fournit l'ensemble des vecteurs estimés $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}\}$ en sortie. La figure 8.4 montre une structure générale d'un système asservi par retour d'état basé sur une estimation $\hat{\mathbf{x}}$ donnée par un observateur de Luenberger (zone orange).

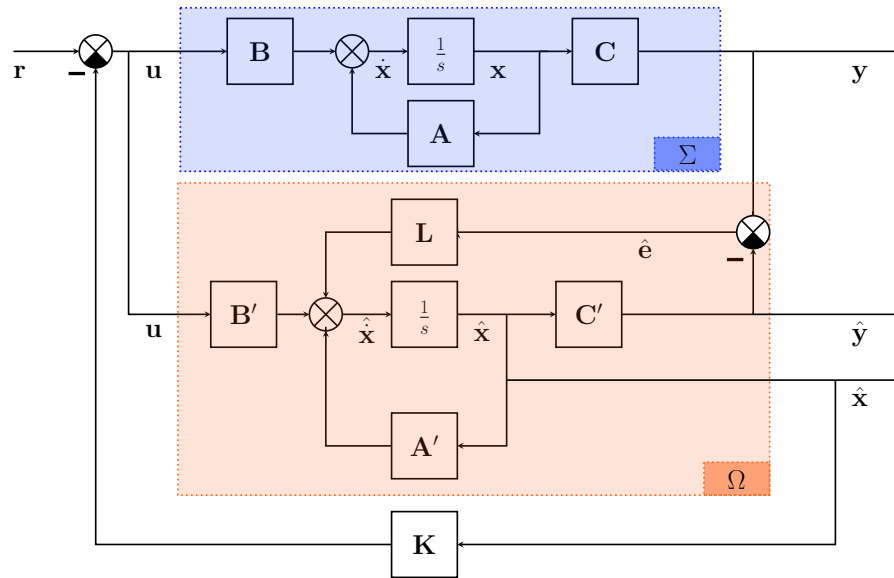


FIGURE 8.4 – Structure d'un système asservi par un observateur de Luenberger.

b) Compensation à l'aide d'observateurs

Avant de concevoir un observateur de l'état complet, le concepteur doit s'assurer que le système (Σ) est observable.

En prenant la structure précédemment énoncée on peut compenser un système

physique en prenant $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\} = \{\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'\}$ ce qui correspond à cloner le système physique (Σ) et le simuler grâce à l'observateur (Ω) .

La dynamique que forme le système complet $(\Sigma \cup \Omega)$ est définie par les équations qui suivent, directement fournies par le schéma en figure 8.4 :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (8.8)$$

Il faut trouver une matrice $\mathbf{L}$ qui satisfasse un cahier des charges donné pour l'erreur d'observation $\boldsymbol{\epsilon}_x = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$. La dynamique de cette dernière dans ce cas est donnée par simple lecture du schéma-blocs et en remarquant que $\hat{\mathbf{e}} = -\mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}_x$:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_x &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - [\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\hat{\mathbf{e}}] \\ &= \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon}_x - \mathbf{L}\mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}_x = [\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}]\boldsymbol{\epsilon}_x. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Les pôles de $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ donnent la dynamique de l'erreur, $\mathbf{L}$ est à choisir en vue de les placer. Nous rappelons que les pôles sont les **valeurs propres** des matrices des systèmes différentiels d'ordre un et qu'il est possible de calculer ces derniers en utilisant des algorithmes tels que celui d'Ackermann.

Le polynôme caractéristique $\chi(x)$ de la matrice dont les racines sont les valeurs propres (les pôles p_i) vaut :

$$\chi(x) = \det(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{I}x) = \prod_i (x - p_i).$$

Si on se donne des pôles à placer, on peut résoudre le système.

Remarque : Il vaut mieux se placer dans **une représentation d'état équivalente** $\mathcal{B}$ adéquate (facile à calculer) par exemple la forme compagne commandable pour trouver $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$ qui résout l'équation précédente dans la représentation $\mathcal{B}$. Une fois ceci fait, il suffit d'utiliser la matrice de passage $\mathbf{P}_{\mathcal{B}}$ et son inverse pour revenir au problème de commande initial.



Sur `Matlab` on peut utiliser les fonctions `place()` ou encore `acker()` pour effectuer de tels placements de pôles par méthodes numériques.

Pour le gain de bouclage par retour d'état $\mathbf{K}$, il suffit d'appliquer ce qui a été énoncé en section II.A en supposant avoir accès à $\mathbf{x}$ par le biais de l'observateur. On peut également utiliser les méthodes intégrale et de précommande, l'observateur n'étant qu'une "astuce" qui fournit l'estimé $\hat{\mathbf{x}}$ de l'état $\mathbf{x}$.

La dynamique totale du système peut s'écrire grâce au vecteur d'état augmenté $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \boldsymbol{\epsilon}_x \end{bmatrix}^\top$ et peut être mise en équation ainsi :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\epsilon}_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\epsilon}_x \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8.10)$$

La matrice étant triangulaire supérieure, l'ensemble des pôles du **système complet** est l'**union des pôles** du **système physique** et de **observateur**. Il faut donc faire attention dans le placement des premiers afin de respecter les contraintes physiques du système.

II.C Un exemple de conception complet sur Matlab commenté

a) Modélisation du système

Supposons que nous voulons asservir le système présenté à la figure 8.5. Il s'agit d'un pendule inversé opérant autour de sa position d'équilibre verticale stable $\theta = 0$. On veut contrôler l'angle θ que décrit ce dernier à l'aide d'un moteur fournissant un couple u .

Soit une masse supposée ponctuelle m , attachée à une tige de masse négligeable de longueur l décrivant un angle θ avec la verticale, colinéaire au vecteur de pesanteur de norme g et en ajoutant un coefficient de frottement b , nous obtenons l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$ml\ddot{\theta} = -gm \sin(\theta) - b\dot{\theta} + u,$$

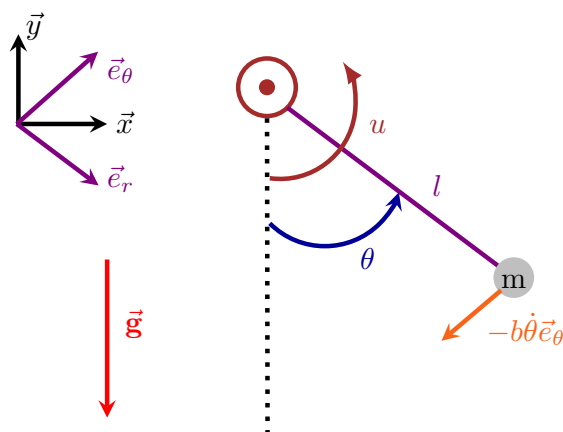


FIGURE 8.5 – Illustration du système étudié.

On linéarise cette équation (non-linéaire) autour de sa position d'équilibre stable en faisant une approximation des petits angles $\sin(\theta) \approx \theta$ et on obtient :

$$\ddot{\theta} = -\frac{b}{ml}\dot{\theta} - \frac{g}{l}\theta + \frac{1}{ml}u,$$

afin de simplifier, on suppose $m = 1$ kg, $l = 1$ m, $g = 10$ m.s⁻² et $b = 0.5$ N.s. Numériquement on a :

$$\ddot{\theta} = -0.5\dot{\theta} - 10\theta + u, \quad (8.11)$$

il s'agit là de notre équation dynamique qui vient régir le système.

b) Espace d'état

On² choisit le formalisme suivant :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} + du \end{cases}$$

Notons que nous voulons contrôler l'angle, nécessairement : $y = \theta$.

2. Moi, Justin Cano, en tant que personne qui ne vaut pas mieux que son voisin : une infinité de représentations existent et sont valides.

Munis de ces informations et de notre choix d'espace d'état. On identifie immédiatement les matrices de la forme de Kalman avec (8.11) :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, d = 0. \quad (8.12)$$

c) Analyse du système sur Matlab

Tout d'abord remarquons que le système représenté par $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, d$ en (8.12) est sous forme compagne commandable. On peut trouver une fonction de transfert en transformant en Laplace (8.11) ou encore en utilisant la définition de la forme CC de ce chapitre :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 10},$$

nous pouvons introduire ceci dans Matlab :

```
1 %% Fonction de transfert en Laplace
2 s = tf('s');
3 % Notre fonction de transfert
4 H = 1/(s^2+0.5*s+10)
5 % Je veux sa représentation d'état
6 [A,B,C,D] = tf2ss(H.Numerator{1},H.Denominator{1})
```

Maintenant voyons si nous ne nous sommes pas trompés :

```
>> A
```

```
A =
```

```

-0.5000  -10.0000
 1.0000      0
```

Surprise. Notre $\mathbf{A}$ est différent de celui de l'équation (8.12) : pourtant cette représentation est équivalente à la notre représentation d'état... il y en a une infinité. Regardons les pôles de A trouvé par Matlab et $\mathbf{A}_{CC}$ de l'équation d'état (8.12) :

```
>> eig(A)

-0.2500 + 3.1524i
-0.2500 - 3.1524i

>> eig([0 1; -10 -0.5])

-0.2500 + 3.1524i
-0.2500 - 3.1524i
```

les pôles sont les mêmes.

Conclusion de l'analyse en boucle ouverte : Comme nous avons maintenant trouvé les pôles, nous savons que ce ne sont pas de bonnes valeurs. En effet, l'amortissement de ce système est faible car la partie imaginaire vaut environ douze fois la partie réelle de ces pôles. On voudrait placer ces derniers à $-2 \pm 2j$. Le système est stable, les parties réelles sont négatives strictement mais la dynamique est trop oscillante...

d) Conception d'un retour d'état

On se donne tout $\mathbf{x}$ d'abord, bien qu'on ne dispose pas encore de la sortie $\dot{\theta}$ dans notre système mais seulement de $y = \theta$:

Question : peut-on placer les pôles là ou on veut ? Réponse éclairée par Matlab :

```
1 %% Propriétés du système étudié
2 % Sa matrice de commandabilité
3 Mcom = ctrb(A,B)
4
5 >> Mcom =
6
7      1.0000      -0.5000
```

```

8           0      1.0000
9 % Est-ce que cette dernière est de plein rang ?
10 rang_Mcom = rank(Mcom)
11 >> 2
12 % Je remarque que oui (le système est complètement
    commandable) mais je remarque aussi que le système est
    SISO (une seule entrée et une seule sortie, en calculant
    le déterminant j'aurais également ma réponse (det non nul)
    )
13 det_Mcom = det(Mcom)
14 >> 1

```

la réponse est oui, le système est commandable. Clairement il l'est car on a trouvé des matrices sous formes compagne commandables pour le représenter en (8.12).

Conceptions concurrentes : On va utiliser la formule d'Ackermann et Place de Matlab, on verra si les résultats sont les mêmes :

```

1 %% Conception de système de commande :
2 % Maintenant je voudrais concevoir une fonction de transfert
    avec des pôles placés en  $-2 \pm 2j$ . Trouvons le gain en
    retour d'état faisant ceci :
3 % Valeurs propres voulues
4 pdes = [-2+j, -2-j]
5 % Polynôme (dénominateur) voulu :
6 poly = conv([1, 2+2j], [1, 2-2j])
7 % Placement de pôle
8 K = place(A, B, pdes)
9 % Fermeture de boucle et verification du placement
10 A_cl = A-B*K;
11 eig_cl = eig(A_cl)
12 % Formule d'Ackermann "maison" (polyvalm calcule le polynôme
    de matrice désiré) on rappelle la formule  $K = -[0 \ 1]*Mcom$ 

```

```

    ^-1*P_des(A) (P_des est le polynôme désiré mais appliqué à
    A)
13 K_ackermann_maison = -[0 1]*(Mcom^-1)*polyvalm(poly,A)
14 A_cl_maison = A+B*K_ackermann_maison;
15 eig_cl_maison = eig(A_cl)

```

L'exécution du code précédent sur Matlab renseigne tout d'abord les pôles désirés et le polynôme correspondant $\chi_{des}(s) = (s - [-2 + j])(s - [-2 - j]) = s^2 + 4s + 8$:

```

>> pdes =

    -2.0000 + 2.0000i    -2.0000 - 2.0000i

poly =

     1     4     8

```

Ensuite on va utiliser la formule de Matlab `place`, prenant en arguments les matrices **A** et **B** puis également les valeurs propres (*aka* les pôles) désirés. Le gain est donné et nous vérifions que le placement est conforme :

```

>> K =

    3.5000    -2.0000

eig_cl =

    -2.0000 + 2.0000i
    -2.0000 - 2.0000i

```

le placement a réussi. Avec notre formule d'Ackermann du théorème 6, en utilisant la fonction `polyvalm` de Matlab (qui calcule un polynôme matriciel) nous arrivons également au même résultat :

```

>> K_ackermann_maison =

   -3.5000    2.0000

```

```
eig_cl_maison =
```

```
-2.0000 + 2.0000i  
-2.0000 - 2.0000i
```

Notons que les gains dans un cas monovariante pour placer les pôles sont uniques ce qui n'est pas du tout le cas pour un système multivariable.

Réponses temporelles du système : On utilise la fonction `step` de Matlab et on obtient : On remarque la logique superposition des deux conceptions que nous avons

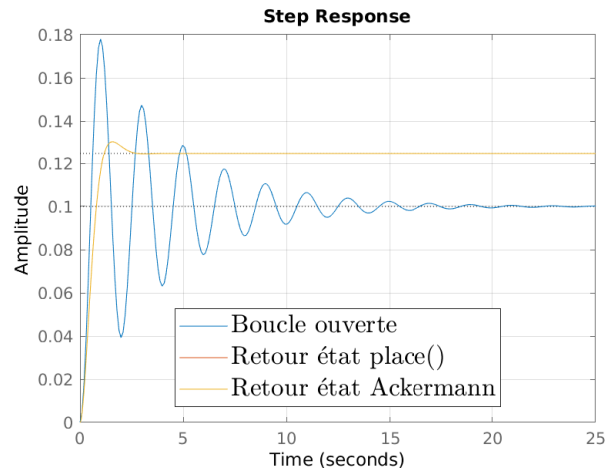


FIGURE 8.6 – Réponse à l'échelon unitaire du pendule par retour d'état ou non.

effectuée sur la figure 8.6, cependant, la référence ici était unitaire... on obtient une réponse dynamiquement sympathique (on a supprimé les oscillations) mais hideuse en régime permanent (le régime est établi à $\frac{1}{8}$ alors que nous poursuivons un échelon unitaire!).



Pour avoir une poursuite sans erreur en ne modifiant pas l'espace d'état, il faudrait calculer un gain de précommande. Dans ce cas (faites le calcul) il vaudrait 8.

e) Conception d'un observateur

Nous le savons, concevoir un contrôleur par retour d'état sans placer des capteurs sur tous les états ne peut se faire. Par contre, il est possible d'estimer, sous l'hypothèse d'observabilité les états si on est en possession de leur dynamique. Ici nous voudrions connaître $\dot{\theta}$ mais le seul capteur est sur la position de l'angle... Comment faire ?

Vérification de l'observabilité du système : Il faut d'abord démontrer que cela est faisable :

```
1 rank_Mobs = rank( obsv(A,C) )
```

La fonction `obsv` nous renvoie la matrice $\mathbf{M}_o$ et son rang indiqué par le logiciel est $\text{rang}(\mathbf{M}_o) = 2 = n$ ce qui signifie que la matrice est de plein rang **le système est donc observable**.

Conception de l'observateur : Ici nous allons placer les pôles de ce dernier à cinq fois celui du système après bouclage avec le gain $\mathbf{K}$ c'est-à-dire à $p_{1,2} = 10 \pm 10j$. Le placement des pôles de l'observateur, n'est pas régi par $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ mais $\mathbf{A}^\top$ et $\mathbf{C}^\top$ (dualité observabilité-commandabilité, qui nous permet d'utiliser les mêmes algorithmes que pour une paire $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ classique), on va utiliser les deux matrices pour trouver le gain $\mathbf{L}^\top$. Il ne faut pas oublier de le transposer Voyons la procédure sur Matlab :

```
1 % On veut des pôles 5 fois plus rapides pour garantir un
   estimé
2 L = place(A',C',pdes*5);
3 L = L' % Transposition car place nous donne un gain ligne
4 % Matrice de dynamique en boucle fermée de l'observateur
5 Acl_obs = A-L*C;
6 % Vérification du placement
7 eig(Acl_obs)
```

Ce qui nous donne en sortie :

```
>> L =
```

180.2500

19.5000

ans =

-10.0000 +10.0000i

-10.0000 -10.0000i

Les pôles sont bien placés malgré des gains élevés. Il va de soi que les gains de l'observateur vont régir sa dynamique d'erreur qui n'est pas une variable physique. Cependant, si les gains sont trop agressifs lors de la rétroaction $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$ cela peut engendrer des problèmes au niveau de la commande d'un système réel comme par exemple des saturations.

Pour tester la dynamique d'erreur de l'observateur, nous prenons la décision de rajouter une erreur d'estimation initiale $\hat{\mathbf{x}}_0 = [2 \ 0]^\top$ le système possède des conditions initiales nulles rappelons-le (Heaviside). Nous utilisons le banc de tests visible à la figure 8.9.

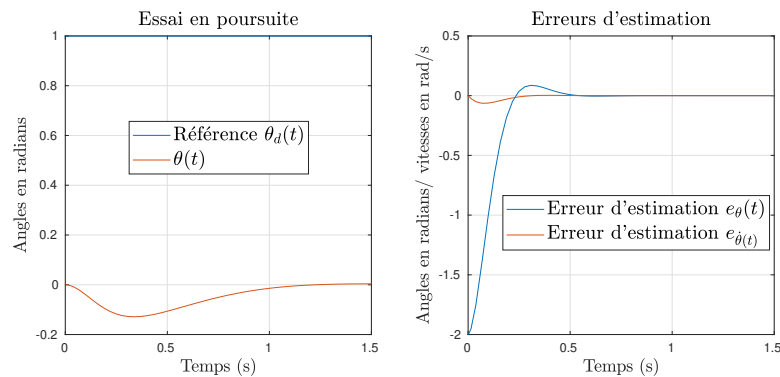


FIGURE 8.7 – Résultat de l'implémentation de l'observateur.

Le résultat en estimation est bon comme nous le montre la figure 8.7, l'erreur d'estimation de l'état semble être absorbée au bout d'une demi-seconde. Cependant, l'erreur en régime permanent n'a aucune chance d'être réduite sans gain de pré-commande. L'astuce que nous allons déployer est simple : nous allons rajouter une composante intégrale à notre commande pour que notre asservissement soit efficace.

f) Retour d'état reconstruit par observateur et action intégrale

La solution est ici d'augmenter l'état en mettant une composante intégrale : comme pour les systèmes à fonction de transfert du chapitre 4, l'adjonction d'une composante intégrale supprime les erreurs en régime permanent du système pour une poursuite de référence constante.

On pose donc $e_i = \int \theta_d(\sigma) - \theta(\sigma) d\sigma$ avec le signal de référence, ou angle désiré $\theta_d := r$ et $\theta := y$ la sortie du système. L'implémentation d'un tel système est visible à la figure 8.9.

Rappelons-nous des formules de la sous-section B.e) pour les matrices augmentées :

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ -\mathbf{D} \end{bmatrix},$$

nous allons donc placer les pôles de notre système augmenté qui supposera $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ (on néglige la dynamique de l'observateur). Nous aurons donc le script de conception qui suit, pour un placement du triplet³ de pôles alignés $2 + 2j, 2 - 2j, -2$ désiré :

```

1 %% Conception d'une commande intégrale
2 Aa = [A zeros(2,1); -C 0]
3 Ba_tilde = [B; 0]
4 % Maintenant je voudrais concevoir une fonction de transfert
   avec des pôles placés en -2 +-2j et -2 (approche alignée)
   . Trouvons le gain en retour d'état faisant ceci :
5 % Valeurs propres voulues
6 pdes = [-2,-2-2j,-2+2j]
7 K_tilde = place(Aa,Ba_tilde,pdes)
8 eig(Aa-Ba_tilde*Ka)
9 K = K_tilde(1,1:2)
10 Ki = -K_tilde(1,3) % Ne pas oublier le moins ici!
```

Ce qui nous donne les gains et les pôles suivants :

3. L'augmentation de l'état a actualisé $n \leftarrow n + 1$ et donc le système dispose d'un pôle supplémentaire.


```
K_tilde =
```

```
    5.5000    6.0000   -16.0000
```

```
poles_bf =
```

```
-2.0000 + 2.0000i
```

```
-2.0000 - 2.0000i
```

```
-2.0000 + 0.0000i
```

les pôles sont bien ce que nous voulions. Et les gains des blocs du schéma 8.3 sont dans notre cas :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5.5 & 6 \end{bmatrix}, K_i = 16,$$

on implémente ces derniers et on procède au test sur **Simulink**. La dynamique de

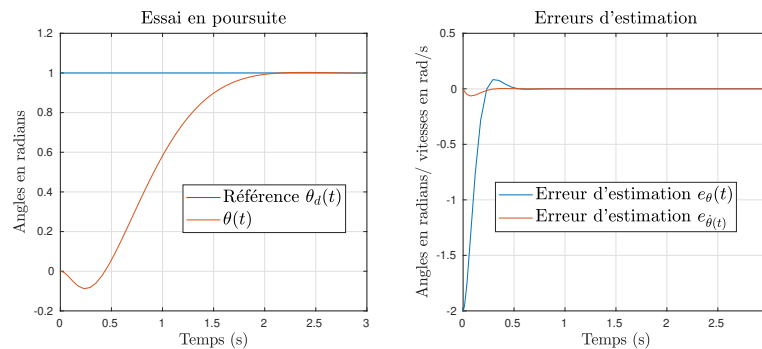


FIGURE 8.8 – Résultat de l’implémentation de l’observateur avec retour d’état intégral.

l’observateur est peu ou prou touchée par notre modification au niveau du contrôleur. L’erreur semble converger avec la même rapidité ce qui est normal puisque l’observateur agit sur la dynamique du système physique (retour d’état estimé) mais en aucun cas sur l’erreur (voir équation (8.10)). En revanche, ce que nous constatons maintenant est **l’absence d’erreur en régime permanent**, ce qui est l’effet escompté de l’adjonction de l’action intégrale.

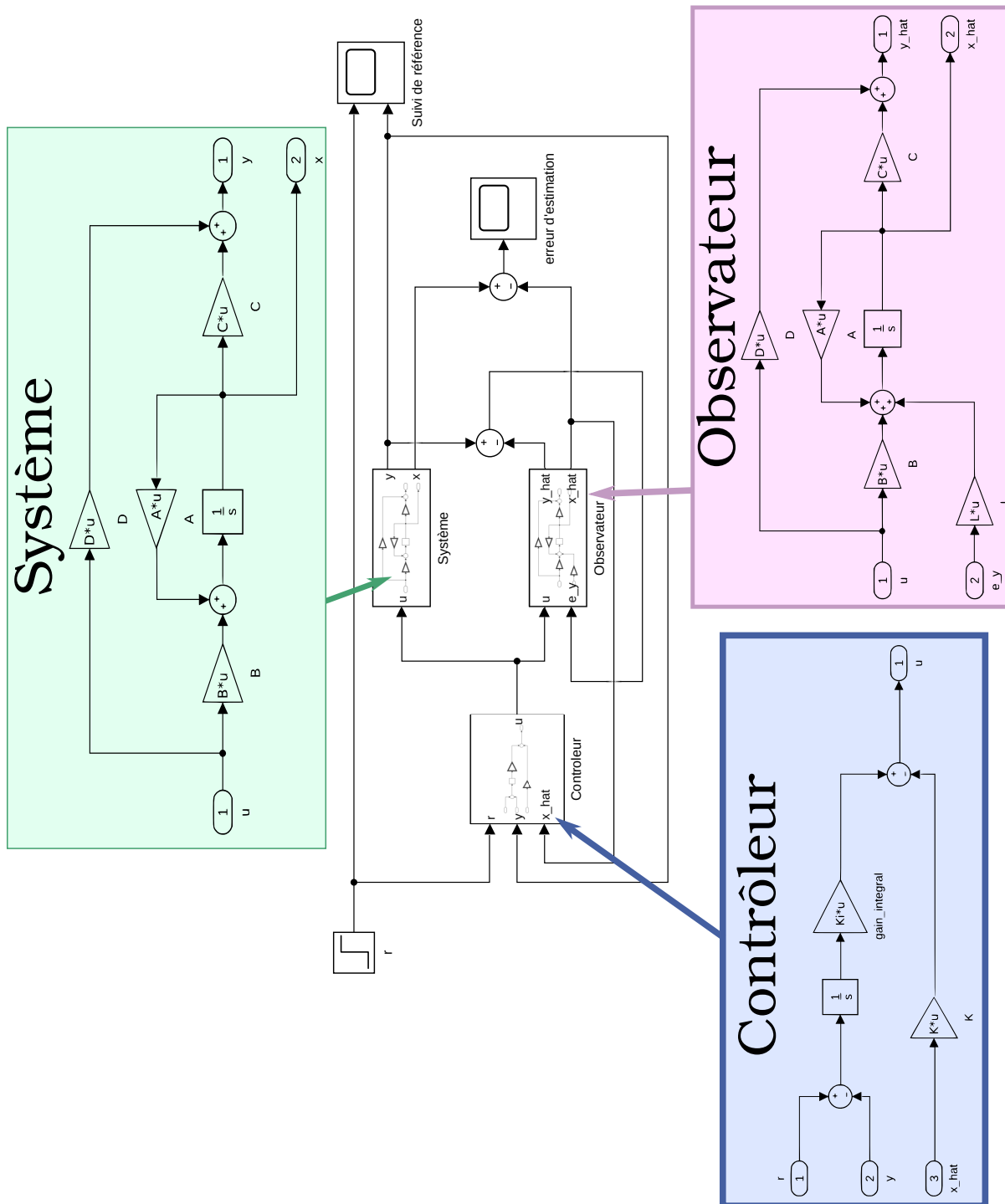


FIGURE 8.9 – Implémentation du contrôleur de l'observateur et du système sur Simulink.

Les plus téméraires d'entre nous voient un creux au début de la réponse indicielle de la sortie du système. Elle est due à l'erreur d'estimation. Sa dynamique est cinq fois plus rapide que celle du système (pôles placés) d'où la différence de facteur d'échelle temporel. Négliger la propagation de l'erreur en supposant $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ dans notre conception doit impliquer une différence conséquente de constantes de temps. Si un système "se trompe" dans l'état qu'il est supposé suivre, cela peut être fatal pour ce dernier.



Notons que la convergence des estimés $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}$ est intrinsèquement liée à la stabilité des pôles de l'observateur, à savoir les valeurs propres de $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$.

Bibliographie

- [Bachelier, 2017] Bachelier, O. (2017). *Représentations d'état linéaires des systèmes monovariabiles*. Lias Lab, Poitiers.
https://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/reserve_docs/coursMEE2.pdf.
- [Dorf and Bishop, 2010] Dorf, R. and Bishop, R. (2010). *Modern Control System*. Pearson.
- [Kilidjian, 2015] Kilidjian, A. (2015). Automatique des systèmes linéaires, notes de cours, École centrale de marseille.
- [Laroche, 2008] Laroche, E. (2008). Méthode de Strejc.
<http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student/MasterIT-ComMach/ComMach1/node36.html#Rep3>.
- [Malhamé, 2016] Malhamé, R. (2016). Asservissements, note de cours, ELE3201, Polytechnique Montréal.
- [Meiss, 2007] Meiss, J. D. (2007). *Differential Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Papanicola, 2019] Papanicola, R. (2019). Toolbox pour abaque de Black-Nichols.
<https://sciences-indus-cpge.papanicola.info/Abaque-de-Black-Nichols>.

- [Wikipédia, 2019] Wikipédia (2019). Distribution (mathématiques).
[https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Distribution_\(math%C3%A9matiques\)&oldid=161840046](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Distribution_(math%C3%A9matiques)&oldid=161840046). Page Version ID : 161840046.
- [Wikipédia, 2019] Wikipédia (2019). Développement limité.
https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=D%C3%A9veloppement_limit%C3%A9&oldid=160304072. Page Version ID : 160304072.
- [Ziegler and Nichols, 1942] Ziegler, J. G. and Nichols, N. B. (1942). Optimum Settings for Automatic Controllers. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 115(2B) :220.



À propos du document

À quoi sert ce document ? Qui est l'auteur ? Comment a t-il évolué ? Réponses ci-dessous...

I Mot de l'auteur

Je suis donc Justin, doctorant en cotutelle entre Polytechnique Montréal et l'ISAE Supaéro en France. Il y a fort longtemps, au siècle précédent ¹, en 2000, j'ai attrapé le virus de l'électronique et j'ai voulu construire un robot. Bien plus tard, après deux «reposantes» années de prépa en France, j'ai intégré l'école Centrale de Marseille au sein de laquelle j'ai vraiment construit un robot. Voulant effectuer une mobilité, j'ai eu la chance de partir au Québec, à Poly, où j'ai effectué un double diplôme ; le thème du mémoire : conception d'un système de navigation, pour robot. Aujourd'hui, respectivement ingénieur et «maître», j'ai décidé d'effectuer une thèse, le sujet : le déploiement des essais... de robots.

Les notes que vous lisez à l'instant sont un cours d'automatique. Soyez rassurés, les robots ont besoin de cette science pour vivre, si je puis dire. Pour leur rédaction, j'exprime tout d'abord ma plus profonde gratitude au professeur Roland Malhamé et à mon ami Samuel Muhindo pour leur collaboration. Il s'agissait, à l'origine, d'un

1. Oui, les siècles c'est un peu comme **Matlab**, cela commence par l'année 1 et non 0.

projet personnel visant à produire un document long en L^AT_EX pour m’entraîner à écrire mon mémoire. Toutefois, j’ai été encouragé par des amis et des collègues à le développer, le document a pris de l’ampleur et c’est une bonne chose : merci à vous !

Sinon, que dire de plus si ce n’est que l’automatique est une science indissociable de l’électronique ? Oui, car au moindre capteur supposé réguler un phénomène, il faut faire appel à elle. Presque tous les systèmes électroniques ont intégré ses notions et même des systèmes qui ne semblent pas de prime abord en avoir besoin, par exemple, les marchés financiers pour l’aide à la décision...

Dans ces notes, nous abordons la conception de correcteurs visant à asservir des systèmes à des performances voulues en termes de rapidité, de précision et de robustesse. Nous nous intéresserons aux systèmes linéaires, invariants et monovariables majoritairement dans ces notes.

Les méthodes de conception d’asservissements pour des systèmes monovariables linéaires à coefficients constants sont matures et populaires dans la littérature. Toutefois, ces approches ne sont plus développées significativement depuis les années 60 et la conception des programmes spatiaux dont les paramètres sont dépendants du temps.

Nonobstant, ces méthodes demeurent la base de la matière et suffisent bien souvent à répondre à des problématiques industrielles tant leur facilité de mise en œuvre est aisée. Et ce pour des résultats convenables...

En espérant que la lecture vous a été profitable,

Justin CANO

Remarque : Toute remarque visant à faire évoluer ce document est bien évidemment souhaitable, n’hésitez pas à me communiquer vos suggestions !

II Versions du document, errata & améliorations

Si vous notez une erreur ou avez une question : Merci de me contacter par mail à l'adresse suivante `justin.cano[at]centraliens-marseille.fr`.

Historique des versions : Un grand merci à ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de ce mémo (*EDIT2020* : originellement, ce sont de vraies notes maintenant!).

v0.1 Préversion-2017.1 : Rédaction de l'ouvrage dans sa forme originelle (EDLC, Laplace), donnée à des élèves en diffusion limitée.

v0.2 Préversion-2018.1 : Préversion pour l'École Centrale de Marseille, chapitres fréquentiels et espace d'états manquants.

Corrections mineures :

- ◇ 18 janv 2018 Merci à Quentin Amerigo (ECM) pour avoir trouvé une méchante faute de frappe. Quelques autres bévues ont été corrigées
- ◇ 22 janv 2018 Merci à Valentin Boisard (ECM) pour m'avoir corrigé des fautes d'orthographe et une formulation ambiguë. J'ai rajouté un exemple de calcul pour le critère de Routh afin de me faire pardonner...

v0.3 Version 2019.1 : Rédaction de la partie fréquentielle.

- Un grand merci à Arnaud Venet (ECM/Poly) pour avoir TOUT relu, il y avait du travail. Je m'excuse encore pour mes notations physiciennes auprès de lui mais $\text{Merci} := \infty$. Ses conseils furent très précieux, nos élèves auront la chance de l'avoir comme répétiteur et sauront enfin que $\pi := 3$;).
- Merci également à Morgane Garreau (ECM/DTU) pour sa relecture future.

v1.0 Version 2019.2 La première version! Rédaction de la partie état et fin de la fréquentielle.

- Merci encore à Arnaud Venet (ECM/Poly), Catherine Massé (Poly/McGill) et Tien Nguyen (Poly) pour leurs retours précieux.

Corrections mineures :

◇ *9 septembre 2019* Fautes mineures détectées, aucun blessé, mais des erreurs de signes, une erreur de normalisation et de la ponctuation inconsistante sont à déplorer.

◇ *1 novembre 2019* Fautes de frappes sur la partie commande moderne corrigées.

v1.1 Version 2019.3 Corrections mineures apportées à l'ensemble du document, qui regorge encore de petites erreurs. Mise au point d'un exemple complet sur Matlab au chapitre d'introduction sur la commande moderne.

◇ *Décembre 2019* : corrections mineures, merci à Arnaud Venet pour le coup de main. Adjontion de matières mathématiques dans l'annexe B, clarification de certains exemples, corrections de fautes de frappes et de fotes d'ortogaffes...

v2.0 Version 2020.1 : Relecture profonde et rajout d'exemples/démonstrations. Chasse aux cartouches oranges (todolists). La mise en page a aussi un peu varié, certains détails m'irritaient... Une refonte de certains chapitres a eu lieu. La version est effectuée dans le but d'assurer le cours *Asservissements* de Polytechnique Montréal. Grande **refonte** des chapitres, scindage en **trois parties**, *relooking* de toutes les en-têtes chapitres, section, sous-sections. Passage du format A4 au **format Lettre**² ajout de **deux chapitres (identification et algèbre des schémas-blocs en annexe)**. Vous l'aurez compris : un grand remaniement et donc propice aux erreurs. Merci de m'en aviser.

Un grand merci à **Roland Malhamé** et **Samuel Muhindo** pour leur précieuse collaboration.

Un merci tout particulier à **Marie Thérèse Nicolas** qui du haut de ses (48)^T printemps sait toujours traquer impitoyablement mes nombreuses **coquilles**. C'est-à-dire que relire près de deux cents pages de signes cabalistiques avec une formation littéraire n'est effectivement **pas** de tout repos ! Merci :-).

◇ *Octobre 2020* : Correction mineures.

— Merci à Thanina Haddad (Poly) pour m'avoir appris que $2s + 3 = 0 \not\Rightarrow s = -2/3$ mais son inverse.

2. Le premier auteur ayant le mauvais goût d'être européen.

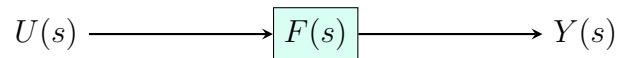
- Merci à Joseph Maheshe, Ghali Harti et Cyrille Tabe (Poly) pour avoir trouvé une coquille dans un tracé de Bode asymptotique et une immense bévue dans le tracé du Nyquist avec intégrateur.
- ◇ *Juin 2021* : correction mineure sur le tableau de Routh. La formule donnée était erronée (décalage d'indice).
- ◇ *Août 2021* : corrections sur la partie CARP, quelques coquilles étaient présentes. Merci à Kaywan Sanjari pour m'avoir fait remonter cette info !

Éléments d'algèbre des schémas-blocs

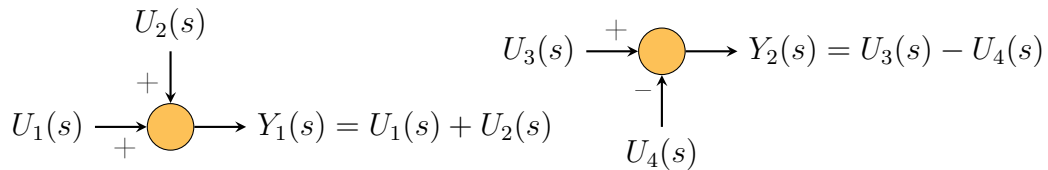
I Opérations élémentaires

I.A Blocs et opérandes

Un **bloc** est défini par le triplet *signal d'entrée* $U(t)$, *signal de sortie* $Y(s)$ et *fonction de transfert* $F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$. Comme suit :



Les **sommateurs** et **soustracteurs** sont définis comme suit :

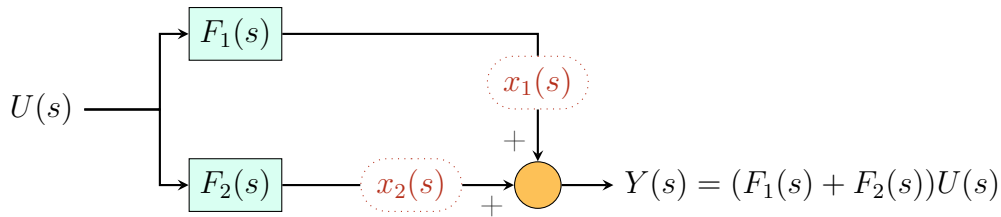


notons que nous ferons souvent abstraction des signes $+$ pour les sommateurs (à défaut de marquage ce sont des sommes).

Remarque : Suivant la littérature, les **sommateurs** se notent parfois avec le symbole qui suit : $\otimes$. Les **soustracteurs** peuvent utiliser le même symbole précisant le signe « $-$ » sur l'entrée ou les entrées soustractrices. Alternativement, on peut voir le signe « $-$ » remplacé ou adjoint d'une partie du symbole noircie : $\otimes$.

I.B Blocs en parallèle

Soient deux fonctions de transfert sommées en parallèle. En introduisant en rouge des signaux intermédiaires pour mieux illustrer, on trouve :



ce qui équivaut strictement à un unique bloc $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ de valeur :

$$U(s) \longrightarrow \boxed{H(s) = F_1(s) + F_2(s)} \longrightarrow Y(s)$$

I.C Blocs en série

Dans le cadre de blocs en série, nous avons :

$$U(s) \longrightarrow \boxed{F_1(s)} \longrightarrow \text{red dashed oval } x(s) \longrightarrow \boxed{F_2(s)} \longrightarrow Y(s)$$

ce qui nous donne les équations suivantes :

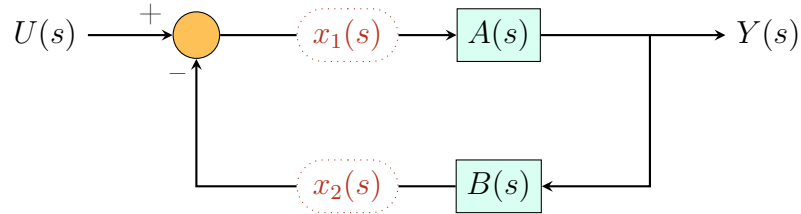
$$\begin{cases} x(s) = F_1(s)U(s) \\ Y(s) = F_2(s)x(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = F_1(s)F_2(s)U(s)$$

donc les blocs équivalent à un bloc unique $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ de valeur :

$$U(s) \longrightarrow \boxed{H(s) = F_1(s) \times F_2(s)} \longrightarrow Y(s)$$

II Boucles

Soit le système bouclé suivant :



Nous avons en lisant le schéma les équations qui suivent :

$$Y(s) = A(s)x_1(s) \quad (a)$$

$$x_2(s) = B(s)Y(s) \quad (b)$$

$$x_1(s) = -x_2(s) + U(s) \quad (b')$$

Nous en déduisons la fonction de transfert en boucle fermée

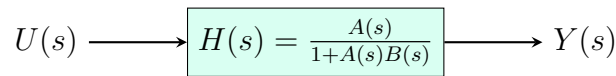
$$(b) \oplus (b') \Rightarrow x_1(s) = -B(s)Y(s) + U(s) \quad (c)$$

$$(c) \oplus (a) \Rightarrow Y(s) = -A(s)B(s)Y(s) + A(s)U(s) \quad (d)$$

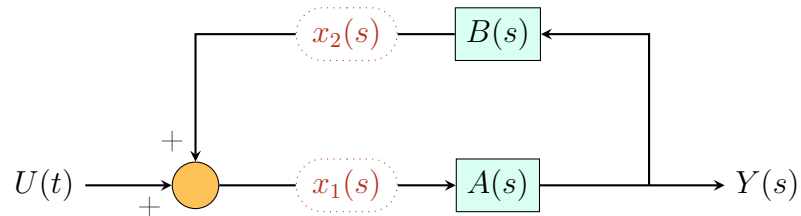
$$(d) \Leftrightarrow (1 + A(s)B(s))Y(s) = A(s)U(s)$$

$$\Leftrightarrow H(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{A(s)}{1 + A(s)B(s)}. \quad \square$$

On a donc le schéma-bloc équivalent qui suit :



De même pour le sommateur qui suit :



On a le schéma équivalent suivant :

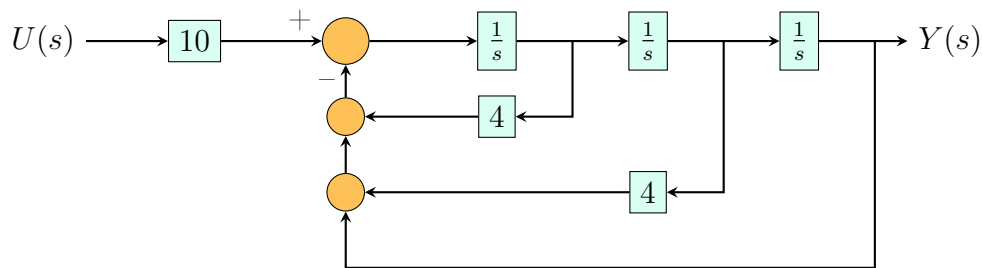
$$U(s) \longrightarrow H(s) = \frac{A(s)}{1-A(s)B(s)} \longrightarrow Y(s)$$

en effet, on a dans ce cas un changement de signe dans l'équation de départ (b') qui viendra introduire le signe moins :

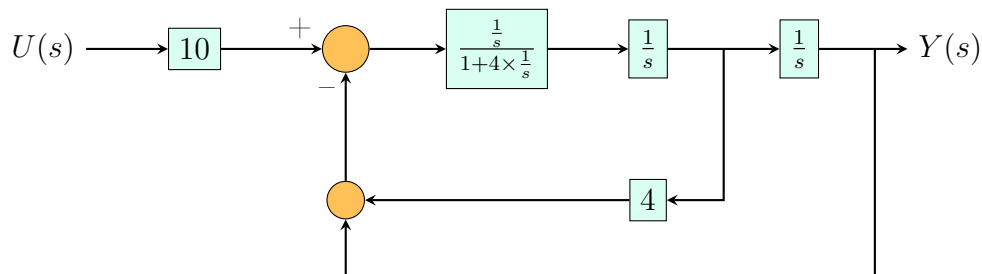
$$x_1(s) = +x_2(s) + U(s) \quad (b').$$

III Un exemple résolu de réduction de schéma-blocs

On souhaite réduire le schéma-blocs suivant :

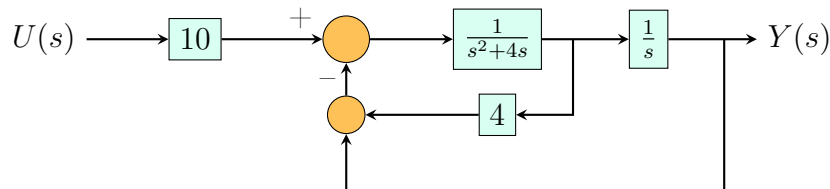


Tout d'abord on réduit la boucle de rétroaction la plus imbriquée :

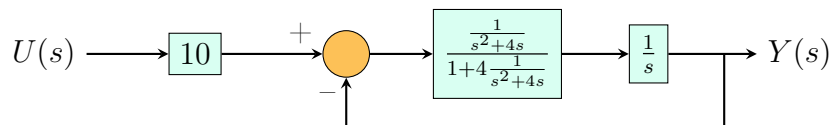


Puis, en appliquant la règle de mise en série des blocs, on obtient la fonction de transfert intermédiaire suivante :

$$H_1(s) := \frac{\frac{1}{s}}{1 + 4 \times \frac{1}{s}} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2 + 4s}.$$



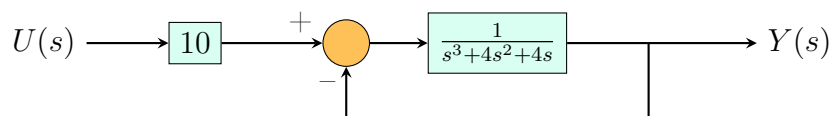
Ensuite, on réduit la deuxième boucle interne :



Remarquons à présent que :

$$H_2(s) := \frac{\frac{1}{s^2+4s}}{1 + 4\frac{1}{s^2+4s}} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 4s},$$

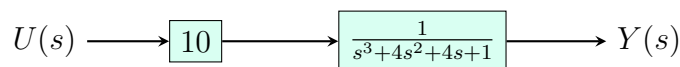
ainsi on a comme schéma équivalent le schéma à boucle de rétroaction unitaire suivant :



Et ainsi on réduit la boucle unitaire en posant :

$$H_3 := \frac{H_2(s)}{1 + 1 \times H_2(s)} = \frac{\frac{1}{s^3+4s^2+4s}}{1 + \frac{1}{s^3+4s^2+4s}} = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 4s + 1},$$

ce qui donne :



Finalement on obtient le schéma bloc équivalent suivant après mise en série de l'ultime bloc :

